Composées de fonctions, cours, première S

F.Gaudon

7 juin 2009

Table des matières

1 Composition de deux fonctions

Définition :

Soient f, g deux fonctions. On définit la fonction h, *composée de f suivie de g* et on note gof (lire « g rond f ») par :

$$x \overset{f}{\longmapsto} f(x) \overset{g}{\longmapsto} g(f(x)) = h(x)$$

Exemple :

$f : x \longmapsto x+3$ et $g : x \longmapsto x^2$.

On a :

$$x \overset{f}{\longmapsto} x+3 \overset{g}{\longmapsto} (x+3)^2$$

La composée de f suivie de g est donc la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto (x+3)^2$.

Par ailleurs :

$$x \overset{g}{\longmapsto} x^2 \overset{f}{\longmapsto} x^2+3$$

La composée de g suivie de f est donc la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto x^2+3$.

Remarques :

- La composée de f suivie de g n'est en général pas la même fonction que la composée de g suivie de f.
- La représentation graphique de la composée de deux fonctions ne se déduit pas de manière intuitive des représentations graphiques des fonctions dont elle est la composée.

Propriété :

- Si f et g ont le même sens de variation sur leurs intervalles d'étude, alors la composée de f suivie de g est croissante sur l'intervalle d'étude de f ;
- si f et g ont des sens de variation opposés sur les intervalles appropriés, alors la composée de f suivie de g est décroissante sur l'intervalle d'étude de f.

Preuve :

- Si f et g sont croissantes sur leurs intervalles d'étude, pour tous réels x et y de l'intervalle d'étude de f avec $x \leq y$, on a par croissance de f, $f(x) \leq f(y)$ puis par croissance de g, $g(f(x) \leq g(f(y))$ ce qui signifie que la composée de f suivie de g est croissante sur l'intervalle d'étude de f ;
- si f est croissante et g est décroissante, pour tous les réels x et y de l'intervalle d'étude de f avec $x \leq y$ on a par croissance de f, $f(x) \leq f(y)$ puis par décroissance de g, $g(f(x) \geq g(f(y))$ ce qui signifie que la composée de f suivie de g est décroissante sur l'intervalle d'étude de f.
- le cas où f est décroissante et g croissante se traite comme ci-dessus ;
- si f et g sont décroissantes, pour tous les réels x et y de l'intervalle d'étude de f avec $x \leq y$, on a par décroissance de f, $f(x) \geq f(y)$ puis par décroissance de g $g(f(x) \leq (f(y))$ ce qui signifie que la composée de f suivie de g est croissante.

Exemple :
$f : x \longmapsto 3x+2$ est croissante sur $\mathbb{R}$ et $g : x \longmapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$ La composée de g suivie de f est définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$x \overset{g}{\longmapsto} \sqrt{x} \overset{f}{\longmapsto} 3\sqrt{x}+2$$

donc la fonction h définie sur $\mathbb{R}^+$ par $h(x) = 3\sqrt{x}+2$ est croissante sur son intervalle de définition.

2 Dérivation de fonctions composées

Propriété :

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. Soient a et b deux réels et J l'ensemble des réels x tels que $ax+b \in I$. Alors la fonction $f : x \longmapsto u(ax+b)$ est dérivable sur J et pour tout x réel de J,

$$f'(x) = au'(ax+b)$$

En particulier,

$$(\cos(ax+b))' = -a\sin(ax+b)$$

$$(\sin(ax+b))' = a\cos(ax+b)'$$

$$(\sqrt{ax+b})' = \frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$$

Preuve :
admise