Fonctions dérivées, cours, première ES

F.Gaudon

23 juin 2014

Table des matières

1 Fonction dérivée et opérations sur les fonctions dérivables

1.1 Fonction dérivée

Définition :
Soit f une fonction définie sur un intervalle I. f est dite *dérivable sur I* si elle est dérivable en tout réel a de I.
La fonction qui, à tout réel a, associe le nombre dérivé $f'(a)$ en a, est appelée *fonction dérivée* de f et notée f'.

2 Opérations sur les fonctions dérivables

2.1 Somme

Propriété :
Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I, alors $u+v$ est définie et dérivable sur I et :

$$(u+v)' = u' + v'$$

Exemple :
$x \mapsto \frac{1}{x} + x^4$ a pour fonction dérivée $x \mapsto -\frac{1}{x^2} + 4x^3$ pour tout réel x non nul.

2.2 Multiplication par un nombre réel k

Propriété :
Soient u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et k un nombre réel, alors ku est définie et dérivable sur I et :

$$(ku)' = ku'$$

Exemple :
$x \mapsto 3x^5 - 3x^2 + 3$ a pour fonction dérivée $x \mapsto 3 \times 5x^4 - 3 \times 2x + 0$ c'est à dire $x \mapsto 15x^4 - 6x$ pour tout réel x.

2.3 Produit

Propriété :

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I, alors uv est dérivable sur I et

$$(uv)' = u'v + v'u$$

Exemple :

On considère $f : x \mapsto (3x-2)\cos(x)$ définie sur $\mathbb{R}$. On pose $u(x) = 3x-2$ et $v(x) = \cos(x)$. Alors $u'(x) = 3$ et $v'(x) = -\sin(x)$ et $f'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x) = 3\cos(x) - (3x - 2)\sin(x)$ pour tout réel x.

2.4 Quotient

Propriété :

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I, avec pour tout x de I, $v(x) \neq 0$, alors $\frac{u}{v}$ est définie et dérivable sur I et

$$(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

En particulier,

$$(\frac{1}{v})' = -\frac{v'}{v^2}$$

Exemple :

On onsidère $f : x \mapsto \frac{3x^2-x}{4-5x}$ définie pour tout réel x différent de $\frac{4}{5}$. On pose $u(x) = 3x^2 - x$ et $v(x) = 4 - 5x$. Alors $u'(x) = 6x - 1$ et $v'(x) = -5$ d'où $f'(x) = (\frac{u'v-v'u}{v^2})(x) = \frac{(6x-1)(4-5x)-(-5)(3x^2-x)}{(4-5x)^2} = \frac{24x-4-30x+5x+15x^2-5x}{(4-5x)^2} = \frac{15x^2-6x-4}{(4-5x)^2}$.