

Application de la dérivation, cours, première ES

F.Gaudon

26 juin 2014

Table des matières

1 Du sens de variation au signe de la dérivée	2
2 Du signe de la dérivée au sens de variation	2
3 Tableau de variation	3
4 Dérivée, extrema et tableau de variation	4

1 Du sens de variation au signe de la dérivée

Propriété :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- Si f est croissante sur I , alors pour tout réel x de I , $f'(x) \geq 0$;
- si f est décroissante sur I , alors pour tout réel x de I , $f'(x) \leq 0$;
- si f est constante sur I , alors pour tout réel x de I , $f'(x) = 0$.

Exemple :

Soit f une fonction définie sur $[-3; 5]$ et telle que :

x	-3	-1	0	5
variations de $f(x)$	4		1	
		↘	↗	↘
		-2		0

Alors la fonction dérivée f' a pour tableau de signes :

x	-3	-1	0	5	
$f'(x)$	-	0	+	0	-

2 Du signe de la dérivée au sens de variation

Propriété :

- Si pour tout réel x de I , $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) > 0$ sauf en quelques points où elle s'annule), alors f est croissante (resp. strictement croissante) sur I ;
- si pour tout réel x de I , $f'(x) \leq 0$ (resp. $f'(x) < 0$ sauf en quelques points où elle s'annule), alors f est décroissante (resp. strictement décroissante) sur I ;
- si pour tout réel x de I , $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I .

Exemple avec un tableau de signes :

Soit f une fonction définie sur $[-3; 5]$ et telle que :

x	-3	-2	0	5	
signe de $f'(x)$	+	0	-	0	+

Le tableau de variations de f est :

x	-3	-2	0	5
variations de $f(x)$		↗	↘	↗

Exemples par le calcul :

- On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 4x^3 + 5$. f est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel x , $f'(x) = 12x^2$. Donc pour tout réel x , $f'(x) > 0$ et par conséquent, f est une fonction croissante sur \mathbb{R} .
- Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{4}{2x+3}$ pour tout x appartenant à $[3; +\infty[$.
On a $f'(x) = -\frac{8}{(2x+3)^2}$.
Pour tout x appartenant à $[3; +\infty[$, le carré $(2x + 3)^2$ est toujours positif donc $f'(x) < 0$ donc f est décroissante strictement sur $[3; +\infty[$.

3 Tableau de variation

Exemples :

- Soit f la fonction définie sur $] -\infty; +\infty[$ par $f(x) = 3x^2 + 7x$. f est dérivable sur \mathcal{R} et pour tout réel x , $f'(x) = 6x + 7$.
 $f'(x) \geq 0$ si et seulement si $6x + 7 \geq 0$ c'est à dire $x \geq -\frac{7}{6}$.
On a donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{7}{6}$	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$		↘ ↗	

- Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = x + \frac{1}{x}$.
Pour tout réel $x \neq 0$,

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 1 - \frac{1}{x^2} \\
 &= \frac{x^2 - 1}{x^2} \\
 &= \frac{(x - 1)(x + 1)}{x^2}
 \end{aligned}$$

On a donc le tableau de variation :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+ 0 -		- 0 +	
$f(x)$		↗	-2 ↘	↘	↗
				2	

4 Dérivée, extrema et tableau de variation

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et x_0 un réel de I .

- Dire que $f(x_0)$ est un *maximum local* (resp. *minimum local*) de f signifie que l'on peut trouver un intervalle ouvert J inclus dans I et contenant x_0 tel que pour tout x de J , $f(x) \leq f(x_0)$ (resp. $f(x) \geq f(x_0)$).
- Un minimum local ou un maximum local est appelé un *extremum local*.

Propriété :

Si f est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I ouvert (c'est à dire de la forme $]a; b[$)

- Si f admet un maximum local ou un minimum local en $x_0 \in I$ avec x_0 , alors $f'(x_0) = 0$;
- si f' s'annule en x_0 en changeant de signe, alors f admet en x_0 un extremum local.

Visualisation :

Cas d'un minimum :

x	x_0		
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

Cas d'un maximum :

x	x_0		
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

Remarque :

On peut avoir $f'(a) = 0$ pour un réel a appartenant à I sans que f n'admette d'extremum local en a . Par exemple, pour $f(x) = x^3$, on a $f'(0) = 0$ mais f n'admet pas d'extremum en 0.