Loi binomiale, cours, première ES

F.Gaudon

26 juin 2014

Table des matières

1 Schéma de Bernoulli

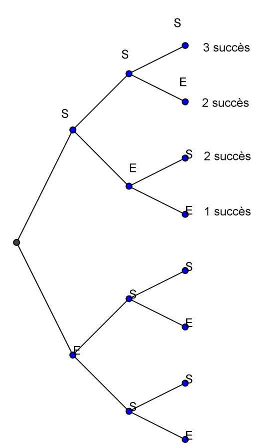
Définition :
Deux expériences sont dites indépendantes si le résultat de l'une n'influe pas sur le résultat de l'autre.

Exemple :
il y a indépendance lorsqu'on lance deux fois de suite une pièce de monnaie.

Définition :
On considère une expérience aléatoire ne comportant que deux issues ; l'une appelée « succès » et l'autre appelée « échec ». On note p la probabilité de succès et q la probabilité d'échec ($q = 1 - p$). La répétition de cette expérience n fois de manière indépendante constitue *un schéma de Bernoulli* de paramètres n et p.

Propriété :
Dans un schéma de Bernoulli, la probabilité d'une liste de résultats est le produit des probabilités de chaque résultat

Exemple :



On contrôle la qualité d'un produit sur une chaîne de production. On prélève 3 produits au hasard. On suppose que les prélèvements sont indépendants. Statistiquement, chaque produit a une probabilité $p = 0,05$ d'être défectueux.
Sur l'arbre ci-dessus représentant un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 3$ et $p = 0,05$, la probabilité d'avoir les deux premières expériences qui donnent un succès et la dernière qui donne un échec est $P(SS\bar{S}) = 0,05^2 \times 0,95 \approx 0,002$
soit 0,2 % de chances d'avoir deux produits défectueux sur les trois prélevés.

Définition :
Soit p un nombre réel tel que $p \in [0;1]$. Soit X une variable aléatoire. On dit que X suit une loi de Bernoulli de paramètre p si :
- X prend pour seules valeurs 1 (« succès ») et 0 (« échec ») ;
- $P(X=1)=p$ et $P(X=0)=1-p$.

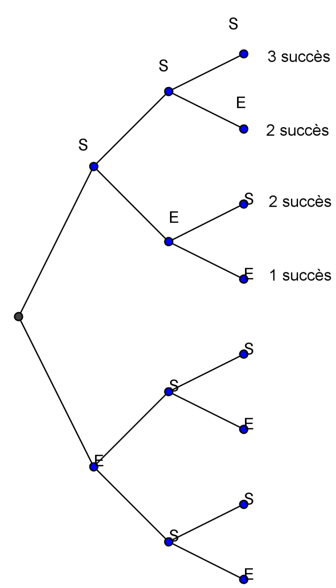
Propriété :
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Bernoulli de paramètre p. $E(X)=p$;

Preuve :
$E(X)=0\times P(X=0)+1\times P(X=1)=0\times(1-p)+1\times p=p$.

2 Loi binomiale

Définition et propriété :
Soient n et k deux entiers naturels avec $k \leq n$. On note $\binom{n}{k}$ (on dit « k sous n ») le nombre de manières d'obtenir k succès et $n-k$ échecs pour n répétitions indépendantes de la même expérience de Bernoulli.

Exemple :



$\binom{4}{4}=1$: il y a une seule manière d'obtenir 4 succès lors de la répétition de 4 épreuves identiques indépendantes.
$\binom{4}{3}=4$: il y a quatre manières d'obtenir 3 succès et un échec lors de la répétition de 4 épreuves identiques indépendantes ($SSSE$; $SSES$; $SESS$;$ESSS$).

Définition :

On considère une épreuve de Bernoulli de paramètre $p \in [0;1]$. On répète n fois ($n \geq 1$) cette expérience indépendamment et on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succés. On dit alors que la variable aléatoire X suit une loi *binomiale* de paramètres n et p et on note $X \sim \mathcal{B}(n;p)$.

Propriété :

Si X est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p, alors la probabilité d'obtenir k succès avec $k \in \{0;1;2;...;n\}$ est $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Preuve :

Il y a $\binom{n}{k}$ manières d'obtenir k succès dans n répétitions d'expériences identiques et indépendantes. La probabilité de chacune de ces événements qui sont évidemment incompatibles est $p^k(1-p)^{n-k}$ d'où le résultat.

Exemple :

On considère le problème précédent de test des produits d'une chaîne de production. Les prélèvements étant supposés indépendants les uns des autres, l'expérience constitue un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 3$ et $p = 0,05$. La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0,05$.
On a $P(X = 2) = P(SS\bar{S} \cap S\bar{S}S \cap SS\bar{S})$
car trois chemins permettent d'obtenir deux succès c'est à dire deux objets défectueux.
D'où $P(X = 2) = P(SS\bar{S}) + P(S\bar{S}S) + P(SS\bar{S})$
donc $P(X = 2) = 0,05^2 \times 0,95 + 0,95 \times 0,05 \times 0,95 + 0,95 \times 0,05^2$
$P(X = 2) = 3 \times 0,05^2 \times 0,95 = \binom{3}{2} 0,05^2(1 - 0,05)^3 = 0,007$
soit une probabilité très faible de 0,007 d'avoir deux produits défectueux.

Calcul pratique de $P(X = k)$ et $P(X \leq k)$:

Soit X une variable aléatoire de paramètres n et p. Pour k allant de 0 à n, pour calculer $P(X = k)$ ou $P(X \leq k)$, on utilise une calculatrice :

- Sur Texas instrument : aller dans le menu $\boxed{\text{2nd}}\boxed{\text{distrib}}$, choisir $\boxed{\text{binomFdp}}$ et taper $\boxed{\text{n}}\boxed{,}\boxed{\text{p}}\boxed{,}\boxed{\text{k}}\boxed{)}$ pour calculer $P(X = k)$ et choisir $\boxed{\text{binomFRép}}$ et taper $\boxed{\text{n}}\boxed{,}\boxed{\text{p}}\boxed{,}\boxed{\text{k}}\boxed{)}$ pour calculer $P(X \leq k)$.
- Sur Casio : aller dans $\boxed{\text{OPTN}}$ puis $\boxed{\text{STAT}}$ puis $\boxed{\text{DIST}}$ puis $\boxed{\text{BINM}}$. Taper alors $\boxed{\text{Bpd}}\boxed{\text{k}}\boxed{,}\boxed{\text{n}}\boxed{,}\boxed{\text{p}}\boxed{)}$ pour calculer $P(X = k)$ ou $\boxed{\text{Bcd}}\boxed{\text{k}}\boxed{,}\boxed{\text{n}}\boxed{,}\boxed{\text{p}}\boxed{)}$ pour calculer $P(X \leq k)$.

Remarques :

- On a $P(X < 3) = P(X \leq 2)$
- pour calculer $P(X > k)$, on calcule $1 - P(X \leq k)$.

Propriété :

L'espérance mathématique de la loi binomiale de paramètres n et p est :

$$E(X) = np$$

Exemple :

Pour le problème de la chaîne de production, en prélevant $n = 100$ produits indépendamment, la loi binomiale a pour paramètres $n = 100$ et $p = 0,05$. On a alors $E(X) = np = 100 \times 0,05 = 5$ ce qui signifie que l'on peut prévoir 5 produits défectueux pour un prélèvement de 100 produits indépendants.