Les triangles cours 5e

F.Gaudon

23 octobre 2004

Table des matières

Résumé

On s'intéresse dans ce chapitre à différentes propriétés des triangles. Dans un premier temps on étudie une condition nécessaire et suffisante sur les longueurs des côtés pour qu'un triangle puisse être tracé. Puis on s'intéresse à trois cas de figures pouvant se présenter pour la construction de triangles. On étudie ensuite un cercle particulier du triangle obtenu grâce aux médiatrices. Enfin on établit une propriété fondamentale des triangles de la géométrie euclidienne, qui porte sur la somme des angles des triangles.

1 Inégalité triangulaire

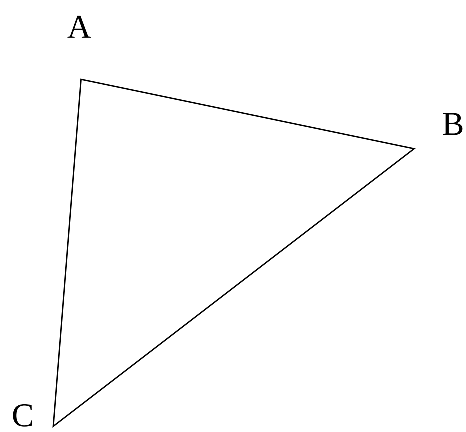
Propriété :

Si ABC est un triangle, alors la longueur d'un côté quelconque est inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés. C'est à dire,

$$AC < AB + BC$$

$$AB < AC + BC$$

$$BC < AB + AC$$



Propriété :

Trois nombres étant donnés, si le plus grand est inférieur à la somme des deux autres, alors ces trois longueurs sont les côtés d'un triangle.

Exemple : Un triangle ABC peut-il avoir pour longueurs $AB = 4$ cm, $AC = 5$ cm et $BC = 6$ cm ?
BC est le plus grand côté.
D'une part, $AB + AC = 9$ cm et d'autre part, $BC = 6$ cm.
Donc un tel triangle existe, il peut être tracé.

Cas particulier de l'égalité triangulaire :

Soient A,B et C trois points.
- Si $AB + BC = AC$ alors le point B appartient au segment $[AC]$;
- Si le point B appartient au segment $[BC]$, alors $AB + BC = AC$.

2 Construction de triangles

2.1 Les longueurs des trois côtés sont données

Exemple :
$AB = 7$ cm ; $AC = 3$ cm ; $BC = 5$ cm
- On trace le côté de plus grande longueur AB en premier (pour obtenir la figure la plus précise possible) ;
- on trace au compas deux cercles de rayons les deux autres longueurs AC et BC et de centres chacune des extrémités A et B du premier côté tracé : le troisième sommet C est à l'intersection des deux cercles.

2.2 Les longueurs de deux côtés et la mesure de l'angle compris entre ces deux côtés sont connus

Exemple :
$AB = 3$ cm ; $AC = 2$ cm ; $\widehat{BAC} = 50°$
- On trace le côté de plus grande longueur AB ;
- on trace l'angle donné $\widehat{BAC}$;
- on trace un cercle de centre A et de rayon AC pour obtenir C.

2.3 La longueur d'un côté et les deux angles adjacents à ces côtés sont donnés

Exemple :
$AB = 3$ cm ; $\widehat{BAC} = 100°$; $\widehat{ABC} = 35°$
- On trace le côté dont la longueur est donnée ;
- on trace les deux angles donnés pour obtenir les deux autres côtés ;
- le troisième sommet est à l'intersection.

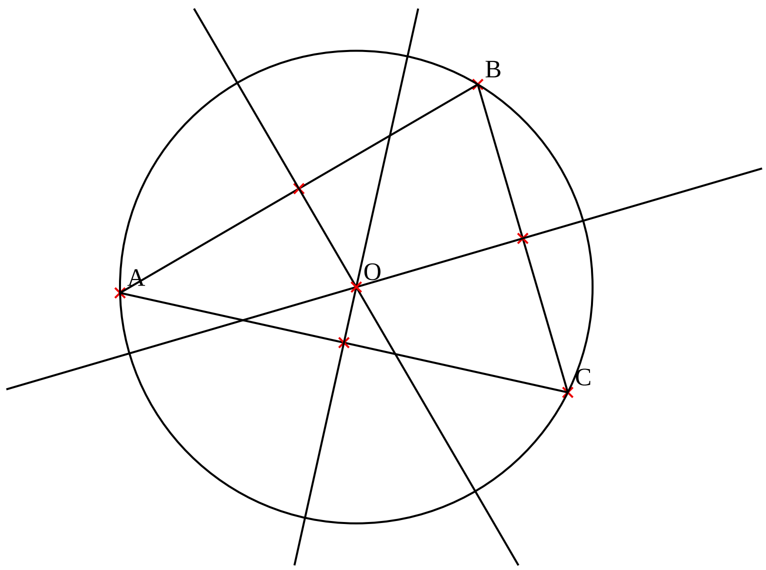
3 Cercle circonscrit à un triangle

Propriété :

Les trois médiatrices des côtés d'un triangle se coupent en un point. On dit qu'elles sont *concourantes*.

Propriété et définition :

Le point d'intersection des médiatrices d'un triangle est le centre d'un cercle passant par les trois sommets du triangle et appelé cercle circonscrit au triangle.



Preuve :
Le triangle n'étant pas aplati, les trois points A, B et C ne sont pas alignés dons les médiatrices des segments $[AB]$ et $[AC]$ se coupent en un point O.
O appartient à la médiatrice de $[AB]$.
D'après la propriété : "Si un point appartient à la médiatrice d'un segment, alors il est à égale distance des extrémités du segment " on en déduit que donc $OA = OB$.
O appartient à la médiatrice de $[AC]$ donc par le propriété précédente, $OA = OC$.
De $OA = OB$ et $OA = OC$ on déduit que $OB = OC$. D'après la propriété "Si un point est à égale distance des extrémités d'un segment, alors il

appartient à la médiatrice de ce segment", on en déduit que O appartient à la médiatrice du segment $[BC]$ donc que O appartient aux trois médiatrices. Elles sont donc bien concourantes. En outre, de $OA = OB$ et $OA = OC$ on déduit $OA = OB = OC$ donc le cercle de centre le point O et de rayon OA passe par A, B et C.