# Symétrie centrale cours 5e

F.Gaudon

14 février 2005

## Table des matières

# 1 Première approche, définition et vocabulaire

**Vis :**

Deux figures sont symétriques par rapport à un point O quand elles se superposent par un demi-tour de centre O.

**Définition :**

Deux points A et A' sont symétriques par la symétrie centrale de centre O si O est le milieu du segment [AA'].

**Propriété :**

- Soient $(d_1)$ et $(d_2)$ deux droites perpendiculaires en un point O. Soit M' le symétrique de M par rapport à $(d_1)$ et M" le symétrique de M' par rapport à $(d_2)$ alors les points M" et M sont symétriques par la symétrie de centre O.
- Soient deux points M et S symétriques par une symétrie centrale de centre un point O. Soient $(d_1)$ une droite passant par le point O et $(d_2)$ une droite perpendiculaire à $(d)$ passant par le point O. Soit enfin M' le symétrique de M par rapport à $(d_1)$. Alors Le point S est le symétrique de M' par rapport à la droite $(d_2)$.

**Preuve :**

O est son propre symétrique dans la symétrie par rapport à la droite $(d_1)$ et M' est le symétrique de M par rapport à $(d_1)$. L'image d'un segment par une symétrie axiale est un segment de même longueur donc les longueurs $OM$ et $OM'$ sont égales.
De même, O est son propre symétrique par rapport à la droite $(d_2)$ et M" est le symétrique de M' par rapport à $(d_2)$ donc les longueurs $OM''$ et $OM'$sont égales.
Donc les longueurs $OM$ et $OM''$ sont égales. Soient H le point d'intersection de $(d_1)$ avec $(MM')$ et K le point d'intersection de $(d_2)$ avec

$(M'M'')$. H est son propre symétrique par rapport à $(d_1)$. Les angles $\widehat{MOH}$ et $\widehat{M'OH}$ sont donc symétriques par rapport à $(d_1)$. Le symétrique d'un angle par une symétrie axiale est est un angle de même mesure donc $\widehat{MOH}$ et $\widehat{M'OH}$ ont même mesure. K est son propre symétrique par rapport à $(d_2)$. Les angles $\widehat{M'OK}$ et $\widehat{KOM''}$ sont donc symétriques et ils ont même mesure d'après la propriété précédente.
Or $\widehat{HOM'} + \widehat{M'OK} = \widehat{HOK}$ et les droites $(d_1)$ et $(d_2)$ sont parallèles donc $\widehat{HOM'} + \widehat{M'OK} = 90°$. On a donc finalement

$$\begin{aligned}
\widehat{MOH} + \widehat{HOM'} + \widehat{M'OK} + \widehat{KOM''} &= \widehat{HOM'} + \widehat{M'OK} + \widehat{HOM'} + \widehat{M'OK} \\
&= 90° + 90° \\
&= 180°
\end{aligned}$$

Les points M, O et M" sont donc alignés. Comme on a vu que les longueurs $OM$ et $OM''$ sont égales, on en déduit que O est le milieu de $[MM'']$ c'est à dire que les points M et M" sont symétriques par rapport à O.

Par la démonstration précédente, on démontre que le point M" symétrique de M' par rapport à $(d_2)$ est le symétrique de M par rapport au point O. Comme on sait que S est le symétrique de M par rapport à O, on en déduit que S et M" sont confondus ce qui montre que S est le symétrique de M' par rapport à $(d_2)$.

**Vocabulaire :**

| |
|---|
| A' est aussi appelé le symétrique du point A par rapport au point O. A et A' sont symétriques par rapport au point O. |

**Remarque :**

Le symétrique d'un point O par la symétrie de centre O est le point O lui-même, on dit que O est son propre symétrique.

# 2 Construction

**Construction du symétrique A' d'un point A donné par rapport à un point O donné :**

- On trace la droite (OA) ;
- on place le deuxième point d'intersection du cercle de centre O passant par le point A avec la droite (OA).

# 3 Propriétés

**Propriétés :**

- La figure symétrique d'un segment par une symétrie centrale est un segment de même longueur ;
- la figure symétrique d'un angle par une symétrie centrale est un angle de même mesure ;
- la figure symétrique d'un cercle de centre I par une symétrie centrale est un cercle de même rayon et de centre le symétrique du centre I ;
- si deux figures sont symétriques par une symétrie centrale, alors elles ont la même aire ;

**Preuve :**

- On a vu que si deux points sont symétriques dans une symétrie centrale par rapport à un point, alors ils sont aussi symétriques en appliquant deux symétrie axiales successives. On sait que le symétrique d'un segment par une symétrie axiale est un segment de même longueur donc le symétrique d'un segment par une symétrie centrale est aussi un segment de même longueur.
- Le symétrique d'un angle par une symétrie axiale est un angle de même mesure donc d'après la propriété déjà utilisée, le symétrique d'un angle par une symétrie centrale est aussi un angle de même mesure.
- Découle des propriétés de deux symétrie axiales consécutives.
- Découle du fait que deux symétries axiales conservent aussi les aires.

**Remarque :**
Une droite qui passe par un point O est sa propre symétrique dans la symétrie centrale par rapport au point O : on dit qu'elle est globalement invariante.

**Propriétés :**

- La figure symétrique d'une droite par une symétrie centrale, est une droite qui lui est parallèle ;
- les symétriques de trois points alignés par une symétrie centrale sont trois points alignés.

**Preuve :**
La deuxième propriété découle de manière évidente de la première.
Montrons la première propriété.
Soient M et N deux points et leurs symétriques respectifs M" et N" par rapport à un point O. On siat qu'il existe deux droites $(d_1)$ et $(d_2)$ perpendiculaires en O telles que M" et N" sont les symétriques de deux points M' et N' par rapport à $(d_2)$ qui sont eux-mêmes obtenus comme les symétriques de M et N par rapport à $(d_1)$.
Distinguons deux cas selon que $(MN)$ et $(d_1)$ sont parallèles ou non. Si $(MN)$ est parallèle à $(d_1)$, on sait que si deux droites sont parallèles, alors toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre donc les droites $(MN)$ et $(d_2)$ sont perpendiculaires. La droite $(d_2)$ est sa propre symétrique par rapport à $(d_1)$ et la symétrie axiale conserve les angles donc la figure symétrique de la droite $(MN)$ est une droite perpendiculaire à $(d_2)$. Donc $(M'N')$ est perpendiculaire à $(d_2)$. Comme $(M'N')$ est perpendiculaire à $(d_2)$, elle sa propre symétrique par rapport à $(d_2)$ donc $(M''N'')$ et confondue avec $(M'N')$ et est perpendiculaire à $(d_2)$. Or $(MN)$ est perpendiculaire à $(d_2)$. Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles donc $(MN)$ et $(M'N')$ sont parallèles ce qui achève la démonstration pour le premier cas.
Si $(d_1)$ et $(MN)$ ne sont pas parallèles, on appelle K le point d'intersection de ces deux droites. K est sur $(d_1)$ donc il est son propre symétrique par rapport à $(d_1)$. La symétrie axiale conserve les angles donc les angles $\widehat{MKO}$

et $\widehat{M'KO}$ sont donc égaux. On appelle H le symétrique de K par rapport à $(d_2)$. La droite $(d_1)$ est perpendiculaire à $(d_2)$ et K appartient à $(d_1)$ donc H appartient encore $(d_1)$. Les angles $\widehat{M'KO}$ et $\widehat{M''HO}$ sont symétriques par rapport à $(d_2)$ donc égaux. L'angle qui lui est symétrique par rapport au point H lui est donc égal et les droites $(MN)$ et $(M''N'')$ ont donc la même inclinaison par rapport à la droite $(d_1)$ : elles sont donc parallèles.