Nombres en écriture fractionnaire cours 5e

F.Gaudon

23 octobre 2004

Résumé

Le but de ce chapitre est d'approfondir l'étude des quotients en abordant la comparaison, l'addition, la soustraction et la multiplication de nombres écrits sous forme fractionnaire.

Table des matières

1 Égalité de quotients

Propriété :

Un nombre en écriture fractionnaire ne change pas quand on multiplie son numérateur et son dénominateur par le même nombre non nul. C'est à dire, pour tous les nombres k, a et b avec k et b non nuls,

$$\frac{a}{b} = \frac{k \times a}{k \times b} = \frac{a \div k}{b \div k}$$

Preuve :
Par définition,

$$\frac{k \times a}{k \times b} \times k \times b = k \times a$$

donc

$$\frac{k \times a}{k \times b} \times b = a$$

donc $\frac{k\times a}{k\times b}$ est un nombre qui, multiplié par b donne a. Or, $\frac{a}{b}$ est le nombre qui, multiplié par b donne a. D'où $\frac{k\times a}{k\times b} = \frac{a}{b}$.

Exemples :

- $A = \frac{1{,}85}{3{,}6}$
  $A = \frac{1{,}85\times 100}{3{,}6\times 100}$
  $A = \frac{185}{360}$
- $B = \frac{24}{32}$
  $B = \frac{8\times 3}{8\times 4}$
  $B = \frac{3}{4}$
  En écrivant que $\frac{24}{32} = \frac{3}{4}$ on a *simplifié* la fraction $\frac{24}{32}$.

2 Comparaison de quotients

2.1 Nombres en écriture fractionnaire de même dénominateur

Propriété :

Si deux nombres en écriture fractionnaire ont le même dénominateur, le plus grand est celui qui a le plus grand numérateur.

Exemples :

- $\frac{3}{8} = 0,375$
  $\frac{5}{8} = 0,625$
  et $\frac{3}{8} < \frac{5}{8}$
- $\frac{8,3}{4,5} > \frac{7,7}{4,5}$

2.2 Nombres en écriture fractionnaire de dénominateurs différents

On ne peut pas comparer simplement en regardant les numérateurs et les dénominateurs des nombres sous forme fractionnaire ayant des dénominateurs différents.

2.2.1 Comparaison par réduction au même dénominateur

Propriété :

Si l'un des nombres en écriture fractionnaire a un dénominateur multiple de l'autre, on utilise la règle de conservation des égalités de quotients pour obtenir le même dénominateur.

Exemple :

Comparaison de $\frac{9}{7}$ et de $\frac{53}{42}$

$A = \frac{9}{7}$

$A = \frac{9\times 6}{7\times 6}$

$A = \frac{54}{42}$

$54 > 53$ donc $\frac{54}{42} > \frac{53}{42}$ et $\frac{9}{7} > \frac{53}{42}$

2.2.2 Comparaison par utilisation de l'écriture décimale

Exemple :
On calcule,
$\frac{9}{7} \approx 1,29$
et $\frac{53}{42} \approx 1,26$
donc $\frac{9}{7} > \frac{53}{42}$

3 Multiplication de quotients

Propriété :

Pour calculer le produit de deux nombres relatifs en écriture fractionaire, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

c'est à dire :

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d} \qquad (b \neq 0,\ d \neq 0)$$

Preuve :

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times b \times d &= \frac{a}{b} \times b \times \frac{c}{d} \times d \\ &= a \times c \end{aligned}$$

donc $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$ est un nombre qui, multiplié par $b \times d$ donne $a \times c$, c'est donc le quotient de $a \times c$ par $b \times d$.

Exemple :

- $$\begin{aligned} \frac{7}{6} \times \frac{15}{28} &= \frac{7 \times 15}{6 \times 28} \\ &= \frac{105}{168} \\ &= \frac{3 \times 35}{3 \times 56} \\ &= \frac{35}{56} \\ &= \frac{7 \times 5}{7 \times 8} \\ &= \frac{5}{8} \end{aligned}$$

- $\dfrac{7}{6} \times \dfrac{15}{28} = \dfrac{7 \times 15}{6 \times 28}$

$$\begin{aligned} &= \frac{7 \times 3 \times 5}{3 \times 2 \times 7 \times 4} \\ &= \frac{5}{2 \times 4} \\ &= \frac{5}{8} \end{aligned}$$

Cas particulier :

$$\begin{aligned} 4 \times \frac{2,5}{3} &= \frac{4}{1} \times \frac{2,5}{3} \\ &= \frac{10}{3} \end{aligned}$$

4 Addition et soustraction de quotients

4.1 Cas où les dénominateurs sont les mêmes

Propriété :

Pour additionner (ou soustraire) deux nombres en écritures fractionnaire de même dénominateur :
– on additionne (ou on soustrait) les numérateurs
– on garde le dénominateur commun

c'est à dire :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \qquad (b \neq 0)$$
$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b} \qquad (b \neq 0)$$

Preuve :

$$\begin{aligned}(\frac{a}{b} + \frac{c}{b}) \times b &= \frac{a}{b} \times b + \frac{c}{b} \times b \qquad \text{distributivité}\\ &= a + c \qquad \text{définition des quotients}\end{aligned}$$

donc $\frac{a}{b} + \frac{c}{b}$ est un nombre qui, multiplié par b donne $a+c$. Or $\frac{a+b}{c}$ est le nombre qui, multiplié par b donne $a+c$. D'où $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$.

Exemple :

- $A = \dfrac{5,4}{7} + \dfrac{12}{7}$

  $A = \dfrac{5,4+12}{7}$

  $A = \dfrac{17,4}{7}$

4.2 Cas où les dénominateurs sont différents

Propriété :

Pour additionner (ou soustraire) deux nombres en écritures fractionnaire de dénominateurs différents, on écrit d'abord les deux nombres avec le même dénominateur en utilisant la règle de conservation des égalités de quotients.

Exemple :

- $$\begin{aligned} A &= \frac{8}{3} + \frac{5}{12} \\ &= \frac{8 \times 4}{3 \times 4} + \frac{5}{12} \\ &= \frac{32}{12} + \frac{5}{12} \\ &= \frac{37}{12} \end{aligned}$$