Quadrilatères cours 5e

F.Gaudon

15 février 2005

Table des matières

1 Parallélogrammes

1.1 Définition et propriétés

Définition :

Un parallélogramme est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles.

Propriétés :

- Un parallélogramme a un centre de symétrie qui est le point d'intersection des diagonales.
- Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors :
  - les diagonales se coupent en leur milieu ;
  - les côtés opposés ont la même longueur ;
  - les angles opposés sont égaux.

Preuve :

- Soit O le milieu de $[AC]$. On a donc C symétrique de A par rapport à O. On sait que C est le symétrique de A par rapport à O. D'après la propriété : "la figure symétrique d'une droite par une symétrie centrale est une droite qui lui est parallèle ", on conclut que la droite symétrique de (AB) est la droite passant par C et parallèle à (AB) c'est à dire (CD). De même on montre que la droite (BC) a pour symétrique (AD).
  Le symétrique du point B se trouve donc à l'intersection de la droite symétrique de (BC) et de la droite symétrique de (AB) : c'est donc l'intersection de (AD) et de (CD) c'est à dire D. Donc ABCD est son propre symétrique et O est un centre de symétrie.
- En outre, D est le symétrique de B par rapport à O donc O est le milieu de $[BD]$. Les diagonales se coupent donc en leur milieu.
- On sait que le symétrique du segment $[AB]$ est $[CD]$ et le symétrique de $[BC]$ est $[AD]$ donc d'après la propriété "la symétrie centrale conserve les longueurs", on conclut que les côtés opposés ont même longueur.

– On sait que A et C sont symétriques, B et D sont symétriques donc que le symétrique de l'angle $\widehat{ABC}$ est $\widehat{CDA}$. D'après la propriété "la symétrie centrale conserve les angles" on conclut que les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{CDA}$ sont égaux.

1.2 Reconnaissance et premières constructions

Propriété :

Si les côtés opposés d'un quadrilatère sont parallèles, alors ce quadrilatère est un parallélogramme.

Preuve :
C'est la définition.

Preuve

Application :
Construction d'un parallélogramme connaissant trois sommets.

Propriété :

Si les diagonales d'un quadrilatère ont le même milieu alors ce quadrilatère est un parallélogramme.

Preuve :
Soit ABCD un tel quadrilatère et soit O le milieu de $[BD]$ et de $[AC]$. B et D sont donc symétriques par rapport à O et A et C sont symétriques par rapport à O.
La droite symétrique de (AB) est donc (CD) et la droite symétrique de (BC) est (AD).
D'après la propriété "La figure symétrique d'une droite par une symétrie centrale est une droite qui lui est parallèle", on en conclut que (AB) et (CD) sont parallèles et (BC) et (AD) sont parallèles. D'où ABCD est un parallélogramme.

Application :
Construction d'un parallélogramme connaissant son centre et un côté.

Propriété :

> Si un quadrilatère convexe a deux côtés opposés parallèles et de même longueur, alors c'est un parallélogramme.

Preuve :
Soit ABCD un quadrilatère convexe ayant les côtés $[AB]$ et $[CD]$ égaux et tel que les droites (AB) et (CD) soient parallèles. On considère le milieu O de $[AC]$. C est donc le symétrique de A par rapport à O. D'après la propriété : "la figure symétrique d'une droite par rapport à un point est une droite qui lui est parallèle", on en déduit que la figure symétrique de la droite (AB) par rapport à O est la droite parallèle à (AB) et passant par le point C : il s'agit donc de (CD). En outre, comme ABCD est convexe, O est à l'intérieur de ABCD, les demi-droites $[AB)$ et $[CD)$ ont donc des directions opposées et d'après la propriété "la figure symétrique d'une demi-droite par une symétrie centrale est une demi-droite d'origine le symétrique de l'origine et de direction contraire", la figure symétrique de la demi-droite $[AB)$ est la demi-droite $[CD)$. D'après la propriété "la figure symétrique d'un segment dans une symétrie centrale est un segment de même longueur", on en déduit que le segment $[AB]$ a pour symétrique un segment de même longueur, dont l'une des extrémités est C et porté par la demi-droite $[CD)$: il s'agit donc du segment $[CD]$. De plus, le symétrique du point B est le point de $[CD]$ situé à la distance CD de C c'est donc D. Par conséquent A et C sont symétriques et B et D sont symétriques par rapport à O, donc les segments $[BD]$ et $[AC]$ ont le même milieu O. D'après la propriété "si un quadrilatère à ses diagonales qui se coupent en leur milieu, alors c'est un parallélogramme", on en déduit que ABCD est un parallélogramme.

Propriété :

> Si les côtés opposés d'un quadrilatère convexe ont la même longueur, alors ce quadrilatère est un parallélogramme.

Preuve :
Soit ABCD un tel quadrilatère. Soit O le milieu de $[AC]$. Le symétrique de A par rapport à O est donc C. Le symétrique de $[AB]$ par rapport à O est un segment de même longueur dont l'une des extrémités est C. Le symétrique de $[BC]$ est un segment de même longueur dont l'une des extrémités est A. Le symétrique de B se trouve à l'intersection des deux segments symétriques précédents. Ces conditions définissent deux points qui sont les intersections du cercle de centre C et de rayon AB et du cercle de centre A et de rayon BC. Mais ABCD est convexe, donc D seulement est situé dans le demi-plan limité par (AC) ne contenant pas B. Or le symétrique B' de B par rapport à O se trouve dans le demi-plan limité par (AO) qui est globalement invariante par rapport à O et ne contenant pas B. Donc D est le symétrique de B par rapport à O.

Application :
Construction à la règle et au compas d'un parallélogramme connaissant trois sommets.

2 Parallélogrammes particuliers

2.1 Losange

Définition :

Un losange est un quadrilatère dont tous les côtés ont la même longueur.

Propriétés :

- Si un quadrilatère est un losange, alors ses côtés sont parallèles et ont la même longueur.
- Si un quadrilatère est un losange, alors ses diagonales se coupent en leur milieu perpendiculairement.

Propriétés :

- Si un quadrilatère a ses quatre côtés de même longueur, alors c'est un losange.
- Si un parallélogramme a deux côtés consécutifs égaux, alors c'est un losange.
- Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent perpendiculairement en leur milieu, alors c'est un losange.
- Si un parallélogramme a ses diagonales perpendiculaires, alors c'est un losange.

Preuve :

- C'est la définition d'un losange.
- Soit ABCD un parallélogramme ayant deux côtés AB et BC égaux. On sait que ABCD est un parallélogramme donc d'après la propriété "Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses côtés opposés sont égaux", on en déduit que AB et CD sont égales et que BC et AD sont égales. Comme AB et BC sont égales, on a finalement $AB = BC = CD = AD$ donc ABCD est un losange.

– Soit ABCD un quadrilatère dont les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent perpendiculairement en leur milieu O. On sait que la diagonale $[AC]$ coupe le segment $[BD]$ en son milieu perpendiculairement donc (AC) est la médiatrice du segment $[BD]$. D'après la propriété "Si un point appartient à la médiatrice d'un segment, alors il est à égale distance des extrémités du segment", on en déduit que A est à égale distance de B et D c'est à dire que AB et AD sont égales et de même C est à égale distance de B et D c'est à dire BC et CD sont égales. De même (BD) coupe le segment $[AC]$ en son milieu perpendiculairement donc (BD) est la médiatrice de $[AC]$ et on en déduit d'après la propriété déjà citée que AB et BC sont égales et que AD et DC sont égales. Finalement, de $AB = AD$, $AB = BC$ et $BC = C$D on déduit que $AB = AD = BC = CD$ donc le quadrilatère ABCD est un losange.
– Soit ABCD un parallélogramme ayant ses diagonales perpendiculaires. On sait donc que ABCD est un parallélogramme, donc d'après la propriété "Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses diagonales se coupent en leur milieu" on déduit que ABCD a ses diagonales qui se coupent en leur milieu. Finalement, le quadrilatère ABCD a ses diagonales qui se coupent perpendiculairement en leur milieu donc d'après la propriété démontrée au point précédent c'est un losange.

2.2 Rectangle

Définition :

Un rectangle est un quadrilatère qui a quatre angles droits.

Propriétés :

– Si un quadrilatère est un rectangle, alors ses côtés opposés sont parallèles et de même longueur.
– Si un quadrilatère est un rectangle, alors ses diagonales ont même longueur et se coupent en leur milieu.

Preuve :

- Soit ABCD un rectangle. De (AB) perpendiculaire à (BC) et (CD) perpendiculaire à (BC), on déduit d'après la propriété "si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles" que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
  De (BC) perpendiculaire à (AB) et (CD) perpendiculaire à (AB) on déduit de la propriété précédente que les droites (BC) et $CD)$ sont parallèles.
  Les côtés opposés du rectangle sont donc parallèles.
- Soit ABCD un rectangle. On vient de montrer que ses côtés opposés sont parallèles donc c'est un parallèlogramme. D'après la propriété "si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses diagonales se coupent en leur milieu", on déduit que les diagonales de ABCD se coupent en leur milieu.
  On sait que les médiatrices des côtés sont des axes de symétrie du rectangle donc A et B part sont symétriques par rapport à une droite passant par O et la symétrie axiale conservant les longueurs, on en déduit donc que OA et OB sont des longueurs égales donc que BD et AC sont des longueurs égales.

Propriétés :

- Si un quadrilatère a trois angles droits, alors c'est un rectangle.
- Si un parallélogramme a un angle droit, alors c'est un rectangle.
- Si un parallélogramme a ses diagonales de même longueur, alors c'est un rectangle.
- Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu et de même longueur, alors c'est un rectangle.

Preuve :

- Soit ABCD un quadrilatère ayant les trois angles $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCD}$ et $\widehat{CDA}$ droits. On sait donc que (AB) est perpendiculaire à (BC) et que (CD) est perpendiculaire à (BC). D'après la propriété "si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles", on en déduit que les droites (AB) et (CD) sont parallèles. On sait donc que (AD) et (CD) sont perpendiculaires et que (AB) et (CD) sont parallèles donc d'après la propriété "si deux droites sont parallèles, alors toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre" on en déduit que les droites (AD) et (AB) sont perpendiculaires c'est à dire que le quadrilatère ABCD a quatre angles droits.

– Soit ABCD un parallélogramme ayant l'angle $\widehat{ABC}$ droit. D'après la propriété "si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses angles opposés sont égaux" on en déduit que $\widehat{ADC}$ est un angle droit. On sait que ABCD est un parallélogramme donc d'après la propriété "si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses côtés opposés sont parallèles" on en déduit que (AB) et (CD) sont parallèles et que (BC) et (AD) sont parallèles. On sait donc que (AB) et (CD) sont parallèles et que (BC) et perpendiculaire à (AB). D'après la propriété "si deux droites sont parallèles, alors toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre" on en déduit que (BC) est perpendiculaire à (CD) c'est à dire que l'angle $\widehat{BCD}$ est droit. Le quadrilatère ABCD a donc trois angles droits, d'après la propriété justifiée précédemment, on en déduit que c'est un rectangle.

– Soit ABCD un parallélogramme dont les diagonales ont même longueur. On appelle O le point d'intersection de ces diagonales.
ABCD est un parallélogramme. D'après la propriété "si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses diagonales se coupent en leur milieu", on déduit que O est le milieu de $[AC]$ et de $[BD]$. De plus, les diagonales ont même longueur donc $OA = OB = OC = OD$. Les triangles DOA et BOA sont donc isocèles en O.
D'après la propriété "dans un triangle les angles à la base sont égaux", on déduit que $\widehat{OAB}$ et $\widehat{OBA}$ sont égaux et que $\widehat{OBC}$ et $\widehat{OCB}$ sont égaux. On sait que la somme des angles d'un triangle est égale à 180 $^\circ$ donc $\widehat{AOB} + 2 \times \widehat{ABO} = 180°$ et $2 \times \widehat{OBC} + \widehat{BOC} = 180°$. Or $\widehat{ABC} = \widehat{ABO} + \widehat{OBC}$ donc
$\widehat{AOB} + 2 \times \widehat{ABO} + 2 \times \widehat{OBC} + \widehat{BOC} = 180° + 180°$ ce qui s'écrit
$\widehat{AOB} + 2 \times (\widehat{ABO} + \widehat{OBC}) + \widehat{BOC} = 360°$ ou encore
$\widehat{AOB} + \widehat{BOC} + 2 \times \widehat{ABC} = 360°$. Mais $\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOC}$ sont supplémentaires donc on l'égalité précédente s'écrit encore
$180° + 2 \times \widehat{ABC} = 180°$ d'où l'on déduit que $\widehat{ABC} = 90°$.
Le parallélogramme ABCD a donc un angle droit, par une propriété précédente, c'est donc un rectangle.