Cours de Mathématiques pour la classe de 5e

F.Gaudon

19 août 2005

Table des matières

Chapitre 1

Enchaînements d’opérations

Les règles de priorité dans les calculs font en sorte que les calculs comportant plusieurs opérations soient effectués par tout le monde dans le même ordre, et ceci sans avoir recours à des parenthèses qui alourdissent l'écriture des calculs.

1.1 Calculs avec parenthèses

Règle 1 :

Dans un calcul avec parenthèses, on effectue d'abord les calculs entre parenthèses en commençant par les parenthèses les plus intérieures.

Règle 1

Exemple :

$$A = 2 \times (43 - (4 + 2))$$
$$A = 2 \times (43 - 6)$$
$$A = 2 \times 37$$
$$A = 74$$

1.2 Calculs sans parenthèses

Règle 2 :

Dans un calcul sans parenthèse et ne comportant que des additions ou dans un calcul ne comportant que des multiplications, les opérations peuvent être effectuées dans n'importe quel ordre.

Exemples :

$$A = 2,5 \times 12 \times 4$$
$$A = 2,5 \times 4 \times 12$$
$$A = 10 \times 12$$
$$A = 120$$

$$B = 25 + 287 + 75$$
$$B = 25 + 75 + 287$$
$$B = 100 + 287$$
$$B = 387$$

Règle 3 :

Dans un calcul sans parenthèse et ne comportant que des additions et des soustractions, les calculs s'effectuent de gauche à droite.

Exemples :

$$A = 10 - 2 + 3$$
$$A = 8 + 3$$
$$A = 11$$

$$B = 4 - 3,2 + 7$$
$$B = 0,8 + 7$$
$$B = 7,8$$

Règle 4 :

Dans un calcul sans parenthèse, les multiplications et les divisions sont effectuées avant les additions et les soustractions.

Exemples :

$$A = 2 \times 3,5 + 7$$
$$A = 7 + 7$$
$$A = 14$$

$$B = 3,5 + 4 - 2 \times 1,5 + 3 \div 2$$
$$B = 3,5 + 4 - 3 + 3 \div 2$$
$$B = 3,5 + 4 - 3 + 1,5$$
$$B = 7,5 - 3 + 1,5$$
$$B = 4,5 + 1,5$$
$$B = 6$$

1.3 Cas des quotients

Règle 5 :

Le trait de fraction sous-entend des parenthèses au numérateur et au dénominateur.

Exemple :

$$A = \frac{45+5}{12-2} + 4$$
$$A = \frac{50}{10} + 4$$
$$A = 5 + 4$$
$$A = 9$$

Chapitre 2

Introduction au calcul littéral

Dans ce chapitre on s'intéresse à des situations nécessitant l'utilisation de lettres dans des formules et on introduit quelques méthodes qui permettent d'écrire plus simplement (c'est à dire avec moins de symboles) les calculs dans lesquels apparaissent des lettres.

2.1 Écritures littérales

Définition :

Une *écriture littérale* est une expression dans laquelle apparaît une lettre.

Exemples :
- aire d'un carré de côté c : c^2 ;
- périmètre d'un cercle de rayon r : $p = 2 \times \pi \times r$;

Remarque :
Dans une écriture littérale, des lettres ont des valeurs fixées ($\pi \approx 3,14159$) et d'autres peuvent pendre n'importe quelle valeur (le rayon r d'un cercle peut être n'importe quel nombre positif).

2.2 Simplification d'écritures littérales

2.2.1 Suppression du signe de multiplication

Propriété :

Le signe de multiplication peut être supprimé devant une lettre ou devant une parenthèse.

Exemples :
- Le produit $a \times b$ s'écrit ab ;
- le produit $2 \times x$ s'écrit $2x$;
- le produit $3,5 \times (3 + x)$ s'écrit $3,5(3 + x)$;
- la formule du périmètre d'un cercle s'écrit $p = 2\pi r$;
- dans 3×5, on ne peut pas supprimer le signe $\times$ car $3 \times 5 \neq 35$.

2.2.2 Utilisation de la distributivité

2.2.3 Propriété de distributivité

Propriété :

Pour tous les nombres a, b et k,

$$k(a+b) = ka + kb$$

et

$$k(a-b) = ka - kb$$

Remarque :
Pour tous les nombres a, b et k, cette propriété ne doit pas être confondue avec les expressions suivantes :
- $k \times a \times b = k \times (a \times b) = (k \times a) \times b$;
- $k + a + b = (k + a) + b = k + (a + b)$.

Définition :

- Passer de l'écriture $k(a+b)$ (ou $k(a-b)$) à l'écriture $ka+kb$ (ou $ka-kb$) s'appelle *développer* ;
- passer de l'écriture $ka+kb$ (ou $ka-kb$) à l'écriture $k(a+b)$ (ou $k(a-b)$) s'appelle *factoriser*.

Définition

Exemples :

$A = 45 \times 98 + 45 \times 2$
$A = 45 \times (98 + 2)$ factorisation par 45
$A = 45 \times 100$
$A = 4500$

$B = 5 \times 320$
$B = 5 \times (300 + 20)$
$B = 5 \times 300 + 5 \times 20$ développement
$B = 1500 + 100$
$B = 1600$

2.2.4 Application à la simplification d'écritures littérales

Exemples :

$C = 3x + 4x$
$C = 3 \times x + 4 \times x$
$C = x \times 3 + x \times 4$
$C = x \times (3 + 4)$ factorisation par x
$C = (3 + 4) \times x$
$C = 7 \times x$
$C = 7x$

$D = 10x + 6,5x - 3x + 5 + 7$
$D = (10 + 6,5 - 3)x + 5 + 7$ factorisation par x
$D = (16,5 - 3)x + 5 + 7$
$D = 13,5x + 5 + 7$
$D = 13,5x + 12$

Remarque :
Attention $13,5x + 12 \neq 25,5x$. En effet, pour $x = 2$ on a $13,5 \times 2 + 12 = 39$ mais $25,5 \times 2 = 51$. Les deux expressions ne donnent donc pas le même résultat pour toutes les valeurs du nombre x, elles ne sont donc pas égales.

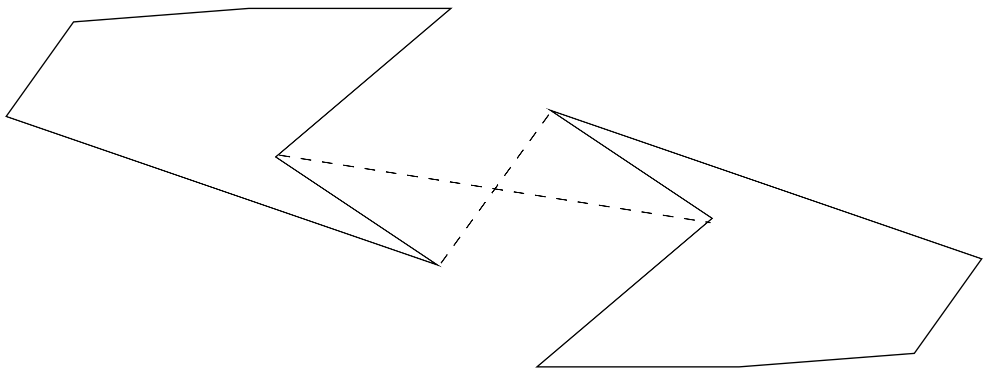
Chapitre 3

Symétrie centrale

3.1 Première approche, définition et vocabulaire

Visualisation :

Deux figures sont symétriques par rapport à un point O quand elles se superposent par un demi-tour de centre O.



Définition :

Deux points A et A' sont symétriques par la symétrie centrale de centre O si O est le milieu du segment [AA'].

Propriété :

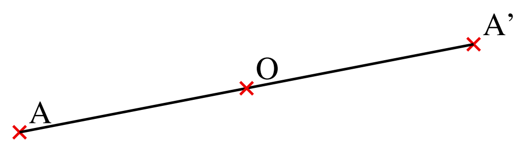
- Soient (d_1) et (d_2) deux droites perpendiculaires en un point O. Soit M' le symétrique de M par rapport à (d_1) et M'' le symétrique de M' par rapport à (d_2) alors les points M'' et M sont symétriques par la symétrie de centre O.
- Soient deux points M et S symétriques par une symétrie centrale de centre un point O. Soient (d_1) une droite passant par le point O et (d_2) une droite perpendiculaire à (d) passant par le point O. Soit enfin M' le symétrique de M par rapport à (d_1). Alors Le point S est le symétrique de M' par rapport à la droite (d_2).

Preuve :

- O est son propre symétrique dans la symétrie par rapport à la droite (d_1) et M' est le symétrique de M par rapport à (d_1). L'image d'un segment par une symétrie axiale est un segment de même longueur donc les longueurs OM et OM' sont égales.
  De même, O est son propre symétrique par rapport à la droite (d_2) et M" est le symétrique de M' par rapport à (d_2) donc les longueurs OM'' et OM'sont égales. Donc les longueurs OM et OM'' sont égales. Soient H le point d'intersection de (d_1) avec (MM') et K le point d'intersection de (d_2) avec $(M'M'')$. H est son propre symétrique par rapport à (d_1). Les angles $\widehat{MOH}$ et $\widehat{M'OH}$ sont donc symétriques par rapport à (d_1). Le symétrique d'un angle par une symétrie axiale est est un angle de même mesure donc $\widehat{MOH}$ et $\widehat{M'OH}$ ont même mesure. K est son propre symétrique par rapport à (d_2). Les angles $\widehat{M'OK}$ et $\widehat{KOM''}$ sont donc symétriques et ils ont même mesure d'après la propriété précédente.
  Or $\widehat{HOM'} + \widehat{M'OK} = \widehat{HOK}$ et les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles donc $\widehat{HOM'} + \widehat{M'OK} = 90°$. On a donc finalement

$$\begin{aligned}\widehat{MOH} + \widehat{HOM'} + \widehat{M'OK} + \widehat{KOM''} &= \widehat{HOM'} + \widehat{M'OK} + \widehat{HOM'} + \widehat{M'OK} \\ &= 90° + 90° \\ &= 180°\end{aligned}$$

  Les points M, O et M" sont donc alignés. Comme on a vu que les longueurs OM et OM'' sont égales, on en déduit que O est le milieu de $[MM'']$ c'est à dire que les points M et M" sont symétriques par rapport à O.
- Par la démonstration précédente, on démontre que le point M" symétrique de M' par rapport à (d_2) est le symétrique de M par rapport au point O. Comme on sait que S est le symétrique de M par rapport à O, on en déduit que S et M" sont confondus ce qui montre que S est le symétrique de M' par rapport à (d_2).



Vocabulaire :

A' est aussi appelé le symétrique du point A par rapport au point O. A et A' sont symétriques par rapport au point O.

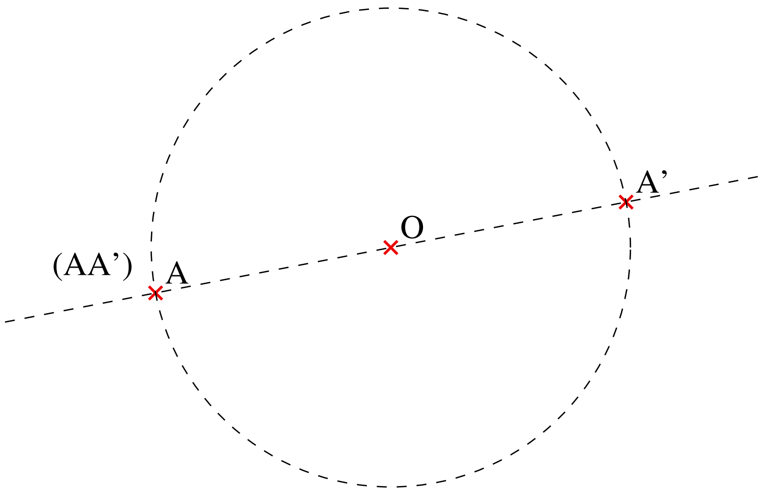
Remarque :

Le symétrique d'un point O par la symétrie de centre O est le point O lui-même, on dit que O est son propre symétrique.

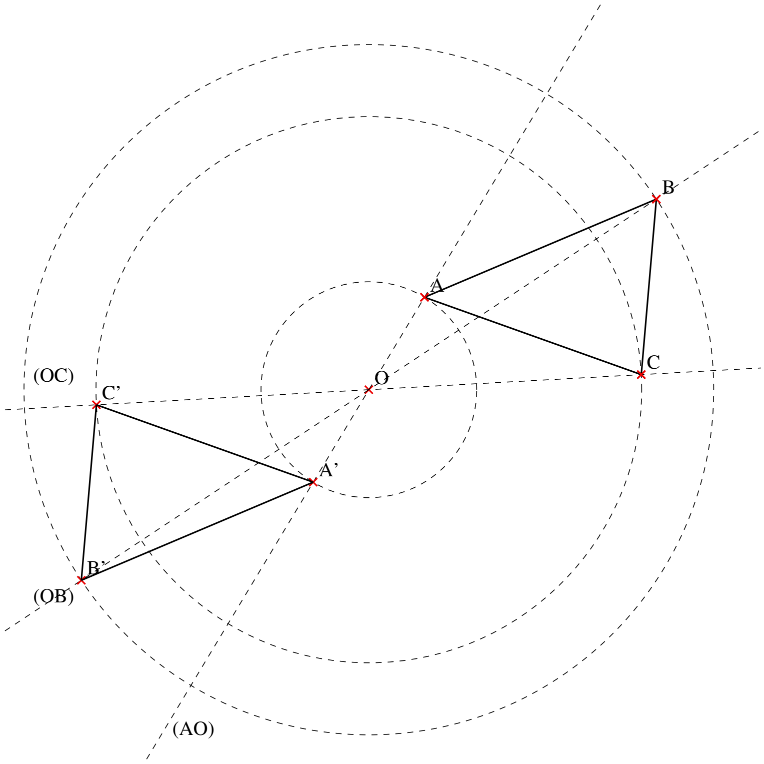
3.2 Construction

Construction du symétrique A' d'un point A donné par rapport à un point O donné :

- On trace la droite (OA) ;
- on place le deuxième point d'intersection du cercle de centre O passant par le point A avec la droite (OA).



3.3 Propriétés



Propriétés :

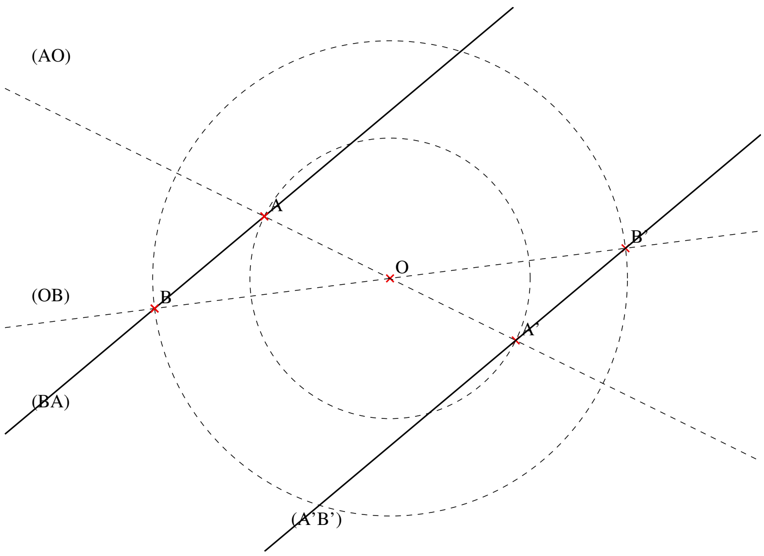
- La figure symétrique d'un segment par une symétrie centrale est un segment de même longueur ;
- la figure symétrique d'un angle par une symétrie centrale est un angle de même mesure ;
- la figure symétrique d'un cercle de centre I par une symétrie centrale est un cercle de même rayon et de centre le symétrique du centre I ;
- si deux figures sont symétriques par une symétrie centrale, alors elles ont la même aire ;

Preuve :

- On a vu que si deux points sont symétriques dans une symétrie centrale par rapport à un point, alors ils sont aussi symétriques en appliquant deux symétrie axiales successives. On sait que le symétrique d'un segment par une symétrie axiale est un segment de même longueur donc le symétrique d'un segment par une symétrie centrale est aussi un segment de même longueur.

- Le symétrique d'un angle par une symétrie axiale est un angle de même mesure donc d'après la propriété déjà utilisée, le symétrique d'un angle par une symétrie centrale est aussi un angle de même mesure.
- Découle des propriétés de deux symétrie axiales consécutives.
- Découle du fait que deux symétries axiales conservent aussi les aires.

Remarque :
Une droite qui passe par un point O est sa propre symétrique dans la symétrie centrale par rapport au point O : on dit qu'elle est globalement invariante.



Propriétés :

- La figure symétrique d'une droite par une symétrie centrale, est une droite qui lui est parallèle ;
- les symétriques de trois points alignés par une symétrie centrale sont trois points alignés.

Preuve :
La deuxième propriété découle de manière évidente de la première.
Montrons la première propriété.
Soient M et N deux points et leurs symétriques respectifs M" et N" par rapport à un point O. On siat qu'il existe deux droites (d_1) et (d_2) perpendiculaires en O telles que M" et N" sont les symétriques de deux points M' et N' par rapport à (d_2) qui sont eux-mêmes obtenus comme les symétriques de M et N par rapport à (d_1).

Distinguons deux cas selon que (MN) et (d_1) sont parallèles ou non. Si (MN) est parallèle à (d_1), on sait que si deux droites sont parallèles, alors toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre donc les droites (MN) et (d_2) sont perpendiculaires. La droite (d_2) est sa propre symétrique par rapport à (d_1) et la symétrie axiale conserve les angles donc la figure symétrique de la droite (MN) est une droite perpendiculaire à (d_2). Donc $(M'N')$ est perpendiculaire à (d_2). Comme $(M'N')$ est perpendiculaire à (d_2), elle sa propre symétrique par rapport à (d_2) donc $(M''N'')$ et confondue avec $(M'N')$ et est perpendiculaire à (d_2). Or (MN) est perpendiculaire à (d_2). Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles donc (MN) et $(M'N')$ sont parallèles ce qui achève la démonstration pour le premier cas.
Si (d_1) et (MN) ne sont pas parallèles, on appelle K le point d'intersection de ces deux droites. K est sur (d_1) donc il est son propre symétrique par rapport à (d_1). La symétrie axiale conserve les angles donc les angles $\widehat{MKO}$ et $\widehat{M'KO}$ sont donc égaux. On appelle H le symétrique de K par rapport à (d_2). La droite (d_1) est perpendiculaire à (d_2) et K appartient à (d_1) donc H appartient encore (d_1). Les angles $\widehat{M'KO}$ et $\widehat{M''HO}$ sont symétriques par rapport à (d_2) donc égaux. L'angle qui lui est symétrique par rapport au point H lui est donc égal et les droites (MN) et $(M''N'')$ ont donc la même inclinaison par rapport à la droite (d_1) : elles sont donc parallèles.

Chapitre 4

Triangles

On s'intéresse dans ce chapitre à différentes propriétés des triangles. Dans un premier temps on étudie une condition nécessaire et suffisante sur les longueurs des côtés pour qu'un triangle puisse être tracé. Puis on s'intéresse à trois cas de figures pouvant se présenter pour la construction de triangles. On étudie ensuite un cercle particulier du triangle obtenu grâce aux médiatrices. Enfin on établit une propriété fondamentale des triangles de la géométrie euclidienne, qui porte sur la somme des angles des triangles.

4.1 Inégalité triangulaire

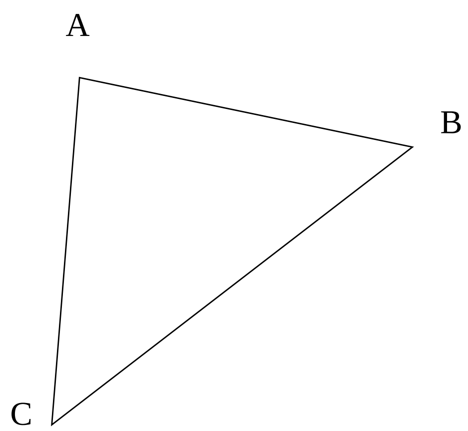
Propriété :

Si ABC est un triangle, alors la longueur d'un côté quelconque est inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés. C'est à dire,

$$AC < AB + BC$$

$$AB < AC + BC$$

$$BC < AB + AC$$



Propriété :

Trois nombres étant donnés, si le plus grand est inférieur à la somme des deux autres, alors ces trois longueurs sont les côtés d'un triangle.

Exemple : Un triangle ABC peut-il avoir pour longueurs $AB = 4$ cm, $AC = 5$ cm et $BC = 6$ cm ?
BC est le plus grand côté.
D'une part, $AB + AC = 9$ cm et d'autre part, $BC = 6$ cm.
Donc un tel triangle existe, il peut être tracé.

Cas particulier de l'égalité triangulaire :

Soient A,B et C trois points.
– Si $AB + BC = AC$ alors le point B appartient au segment $[AC]$;
– Si le point B appartient au segment $[BC]$, alors $AB + BC = AC$.

4.2 Construction de triangles

4.2.1 Les longueurs des trois côtés sont données

Exemple :
$AB = 7$ cm ; $AC = 3$ cm ; $BC = 5$ cm
– On trace le côté de plus grande longueur AB en premier (pour obtenir la figure la plus précise possible) ;
– on trace au compas deux cercles de rayons les deux autres longueurs AC et BC et de centres chacune des extrémités A et B du premier côté tracé : le troisième sommet C est à l'intersection des deux cercles.

4.2.2 Les longueurs de deux côtés et la mesure de l'angle compris entre ces deux côtés sont connus

Exemple :
$AB = 3$ cm ; $AC = 2$ cm ; $\widehat{BAC} = 50°$
– On trace le côté de plus grande longueur AB ;
– on trace l'angle donné $\widehat{BAC}$;
– on trace un cercle de centre A et de rayon AC pour obtenir C.

4.2.3 La longueur d'un côté et les deux angles adjacents à ces côtés sont donnés

Exemple :
$AB = 3$ cm ; $\widehat{BAC} = 100°$; $\widehat{ABC} = 35°$

– On trace le côté dont la longueur est donnée ;
– on trace les deux angles donnés pour obtenir les deux autres côtés ;
– le troisième sommet est à l'intersection.

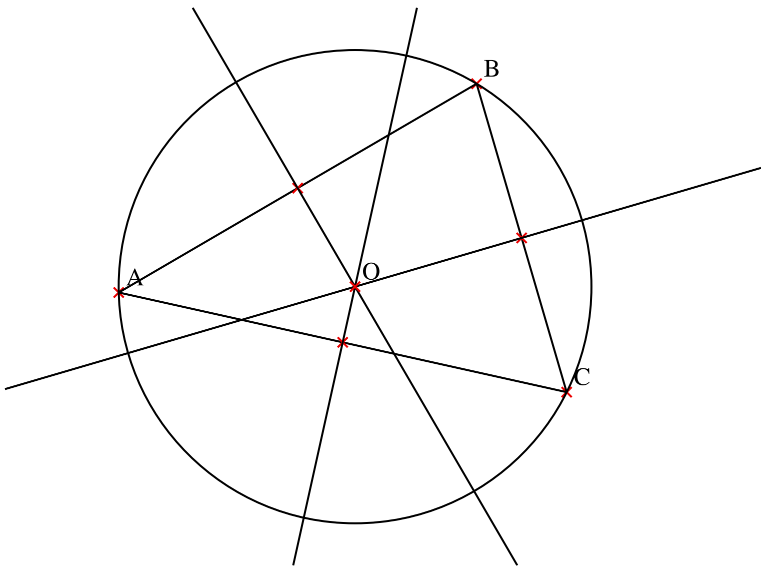
4.3 Cercle circonscrit à un triangle

Propriété :

Les trois médiatrices des côtés d'un triangle se coupent en un point. On dit qu'elles sont *concourantes*.

Propriété et définition :

Le point d'intersection des médiatrices d'un triangle est le centre d'un cercle passant par les trois sommets du triangle et appelé cercle circonscrit au triangle.



Preuve :
Le triangle n'étant pas aplati, les trois points A, B et C ne sont pas alignés donc les médiatrices des segments $[AB]$ et $[AC]$ se coupent en un point O.
O appartient à la médiatrice de $[AB]$.
D'après la propriété : "Si un point appartient à la médiatrice d'un segment, alors il est à égale distance des extrémités du segment " on en déduit que donc
$OA = OB$.
O appartient à la médiatrice de $[AC]$ donc par la propriété précédente,
$OA = OC$.

De $OA = OB$ et $OA = OC$ on déduit que $OB = OC$. D'après la propriété "Si un point est à égale distance des extrémités d'un segment, alors il appartient à la médiatrice de ce segment", on en déduit que O appartient à la médiatrice du segment $[BC]$ donc que O appartient aux trois médiatrices. Elles sont donc bien concourantes. En outre, de $OA = OB$ et $OA = OC$ on déduit $OA = OB = OC$ donc le cercle de centre le point O et de rayon OA passe par A, B et C.

Chapitre 5

Quotients

Le but de ce chapitre est d'approfondir l'étude des quotients en abordant la comparaison, l'addition, la soustraction et la multiplication de nombres écrits sous forme fractionnaire.

5.1 Égalité de quotients

Propriété :

Un nombre en écriture fractionnaire ne change pas quand on multiplie son numérateur et son dénominateur par le même nombre non nul. C'est à dire, pour tous les nombres k, a et b avec k et b non nuls,

$$\frac{a}{b} = \frac{k \times a}{k \times b} = \frac{a \div k}{b \div k}$$

Preuve :
Par définition,

$$\frac{k \times a}{k \times b} \times k \times b = k \times a$$

donc

$$\frac{k \times a}{k \times b} \times b = a$$

donc $\frac{k \times a}{k \times b}$ est un nombre qui, multiplié par b donne a. Or, $\frac{a}{b}$ est le nombre qui, multiplié par b donne a. D'où $\frac{k \times a}{k \times b} = \frac{a}{b}$.

Exemples :

- $A = \frac{1{,}85}{3{,}6}$
  $A = \frac{1{,}85 \times 100}{3{,}6 \times 100}$
  $A = \frac{185}{360}$
- $B = \frac{24}{32}$
  $B = \frac{8 \times 3}{8 \times 4}$
  $B = \frac{3}{4}$
  En écrivant que $\frac{24}{32} = \frac{3}{4}$ on a *simplifié* la fraction $\frac{24}{32}$.

5.2 Comparaison de quotients

5.2.1 Nombres en écriture fractionnaire de même dénominateur

Propriété :

Si deux nombres en écriture fractionnaire ont le même dénominateur, le plus grand est celui qui a le plus grand numérateur.

Exemples :

- $\frac{3}{8} = 0,375$
  $\frac{5}{8} = 0,625$
  et $\frac{3}{8} < \frac{5}{8}$
- $\frac{8,3}{4,5} > \frac{7,7}{4,5}$

5.2.2 Nombres en écriture fractionnaire de dénominateurs différents

On ne peut pas comparer simplement en regardant les numérateurs et les dénominateurs des nombres sous forme fractionnaire ayant des dénominateurs différents.

Comparaison par réduction au même dénominateur

Propriété :

Si l'un des nombres en écriture fractionnaire a un dénominateur multiple de l'autre, on utilise la règle de conservation des égalités de quotients pour obtenir le même dénominateur.

Exemple :
Comparaison de $\frac{9}{7}$ et de $\frac{53}{42}$
$A = \frac{9}{7}$
$A = \frac{9\times6}{7\times6}$
$A = \frac{54}{42}$
$54 > 53$ donc $\frac{54}{42} > \frac{53}{42}$ et $\frac{9}{7} > \frac{53}{42}$

Comparaison par utilisation de l'écriture décimale

Exemple :
On calcule,
$\frac{9}{7} \approx 1,29$
et $\frac{53}{42} \approx 1,26$
donc $\frac{9}{7} > \frac{53}{42}$

5.3 Multiplication de quotients

Propriété :

Pour calculer le *produit* de deux nombres relatifs en écriture fractionaire, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

c'est à dire :

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d} \qquad (b \neq 0,\ d \neq 0)$$

Preuve :

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times b \times d &= \frac{a}{b} \times b \times \frac{c}{d} \times d \\ &= a \times c \end{aligned}$$

donc $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$ est un nombre qui, multiplié par $b \times d$ donne $a \times c$, c'est donc le quotient de $a \times c$ par $b \times d$.

Exemple :

- $\begin{aligned} \frac{7}{6} \times \frac{15}{28} &= \frac{7 \times 15}{6 \times 28} \\ &= \frac{105}{168} \\ &= \frac{3 \times 35}{3 \times 56} \\ &= \frac{35}{56} \\ &= \frac{7 \times 5}{7 \times 8} \\ &= \frac{5}{8} \end{aligned}$

- $$\begin{aligned}\frac{7}{6} \times \frac{15}{28} &= \frac{7 \times 15}{6 \times 28} \\ &= \frac{7 \times 3 \times 5}{3 \times 2 \times 7 \times 4} \\ &= \frac{5}{2 \times 4} \\ &= \frac{5}{8}\end{aligned}$$

Cas particulier :

$$\begin{aligned}4 \times \frac{2,5}{3} &= \frac{4}{1} \times \frac{2,5}{3} \\ &= \frac{10}{3}\end{aligned}$$

5.4 Addition et soustraction de quotients

5.4.1 Cas où les dénominateurs sont les mêmes

Propriété :

Pour *additionner* (ou soustraire) deux nombres en écritures fractionnaire de même dénominateur :
- on additionne (ou on soustrait) les numérateurs
- on garde le dénominateur commun

c'est à dire :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \qquad (b \neq 0)$$
$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b} \qquad (b \neq 0)$$

Preuve :

$$\begin{aligned}(\frac{a}{b}+\frac{c}{b})\times b &= \frac{a}{b}\times b+\frac{c}{b}\times b \qquad \text{distributivité}\\ &= a+c \qquad \text{définition des quotients}\end{aligned}$$

donc $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}$ est un nombre qui, multiplié par b donne $a+c$. Or $\frac{a+b}{c}$ est le nombre qui, multiplié par b donne $a+c$. D'où $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$.

Exemple :

- $A=\dfrac{5,4}{7}+\dfrac{12}{7}$
  $A=\dfrac{5,4+12}{7}$
  $A=\dfrac{17,4}{7}$

5.4.2 Cas où les dénominateurs sont différents

Propriété :

Pour additionner (ou soustraire) deux nombres en écritures fractionnaire de dénominateurs différents, on écrit d'abord les deux nombres avec le même dénominateur en utilisant la règle de conservation des égalités de quotients.

Exemple :

- $A=\dfrac{8}{3}+\dfrac{5}{12}$
  $=\dfrac{8\times 4}{3\times 4}+\dfrac{5}{12}$
  $=\dfrac{32}{12}+\dfrac{5}{12}$
  $=\dfrac{37}{12}$

Chapitre 6

Proportionnalité

6.1 Reconnaître une situation de proportionnalité

6.1.1 D'après le contexte

Exemples :
– Le prix de l'essence achetée est proportionnel à la quantité d'essence achetée.
– La distance sur une carte est proportionnelle à la distance réelle.

6.1.2 Sur un tableau

Exemple 1 :

2,5	6	9
12,5	30	45

$$\frac{12,5}{2,5} = \frac{30}{6} = \frac{45}{9} = 5$$

et

$$\frac{5}{12,5} = \frac{6}{30} = \frac{9}{45} = 0,2$$

Les quotients des nombres du haut par ceux du bas sont tous égaux donc il y a proportionnalité.

Remarque :
Dans l'exemple précédent, 5 et 0,2 sont des *coefficients de proportionnalité*.

Exemple 2 :

12	15	35
7,2	9	28

$$\frac{7,2}{12} = \frac{9}{15} = 0,6 \qquad \text{mais} \qquad \frac{35}{28} = 0,8$$

Les quotients ne sont pas tous égaux donc il n'y a pas proportionnalité.

6.2 Calculer une quatrième proportionnelle

6.2.1 En utilisant un coefficient de proportionnalité

Exemple :

15	32,5
10	

$$32,5 \times \frac{10}{15} \approx 21,67$$

6.3 Cas particuliers de proportionnalité

6.3.1 Mouvement uniforme

Définition et propriété :

Dire que le *mouvement* d'un mobile est *uniforme* signifie que la distance parcourue est proportionnelle à la durée du trajet. La vitesse du mobile est un coefficient de proportionnalité.

Exemple :

distance (m)	7800	x
durée (s)	1	10

$x = 78000$ soit 78000 m/s, vitesse de descente de la navette spatiale.

6.3.2 Mesure du temps

Propriété :

Les durées exprimées en heures et les durées correspondantes exprimées en minutes sont proportionnelles.

Exemple :

durée en h	1	
durée en min	60	42

$42\,min = \frac{42}{60}\,h = 0,7\,h$. En particulier, $1,5\,h = 90\,min$.

6.3.3 Échelles

Propriété :

Lorsqu'on réalise une carte à l'*échelle*, il y a proportionnalité entre les distances réelles et celles sur la carte. L'*échelle* de la carte est un coefficient de proportionnalité. C'est à dire,

$$\text{échelle} = \frac{\text{distance sur la carte}}{\text{distance réelle}}$$

où l'échelle est une grandeur sans unité et où la distance sur la carte et la distance réelle sont exprimées dans la même unité.

Exemple :
Sur une carte, une distance en réalité de 800 cm est représentée par 4 cm.

distance réelle en cm	800	
distance sur la carte en cm	4	1

1 cm sur la carte est représenté par 200 cm en réalité. L'échelle est $\frac{4}{800} = \frac{1}{200}$.

Chapitre 7

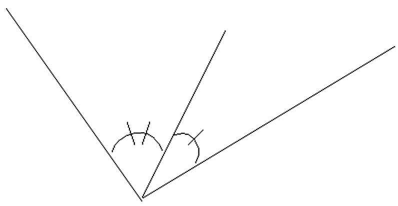
Angles

7.1 Différents types d'angles

7.1.1 Angles adjacents

Définition :

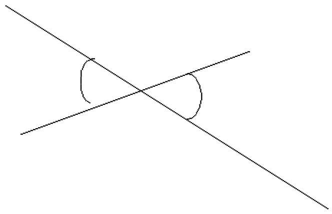
Deux angles sont *adjacents* s'ils ont le même sommet, un côté commun et s'ils sont situés de part et d'autre du côté commun.



7.1.2 Angles opposés par le sommet

Définition :

Deux angles sont *opposés par le sommet* s'ils ont le même sommet et s'ils sont symétriques par rapport au sommet commun.



Propriété :

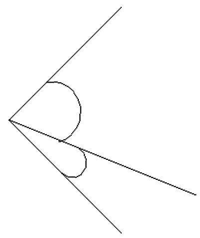
Si deux angles sont opposés par le sommet, alors ils ont même mesure.

Preuve :
Conséquence immédiate de la conservation des angles par la symétrie centrale.

7.1.3 Angles complémentaires

Définition :

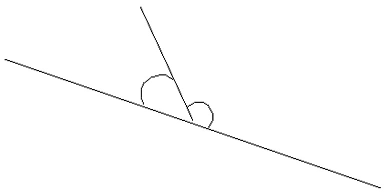
Deux angles sont *complémentaires* si leur somme vaut 90 ° .



7.1.4 Angles supplémentaires

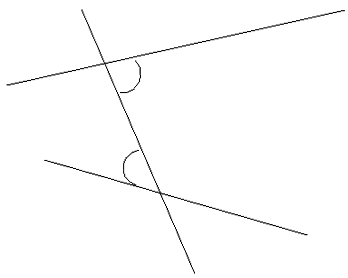
Définition :

Deux angles sont *supplémentaires* si leur somme vaut 180 ° .



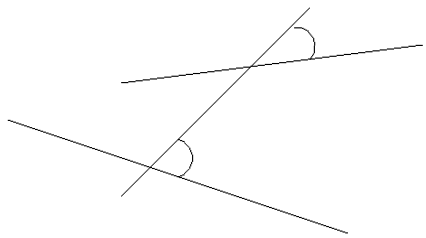
Définition :

Soient deux droites et une troisième droite sécante avec les deux droites. Deux angles sont *alternes internes* s'ils sont situés à l'intérieur des deux droites et de part et d'autre de la sécante.



Définition :

Soient deux droites et une troisième droite sécante avec les deux droites. Deux angles sont *correspondants* s'ils sont situés du même côté de la sécante, l'un étant entre les deux droites, l'autre pas.



7.2 Parallélisme et angles

Propriété :

- Si deux droites coupées par une sécante sont parallèles, alors les angles alternes-internes formés sont égaux ;
- Si deux droites coupées par une sécante forment des angles alternes-internes égaux, alors elles sont parallèles.

Preuve :

- Soient (d_1) et (d_2) deux droites parallèles coupées par une sécante δ en deux points A et B. Soit I le milieu de $[AB]$. Les deux points A et B sont donc symétriques par rapport au point I. Le point A appartient à la droite (d_1) donc son symétrique B appartient à la droite symétrique de la droite (d_1) par rapport au point I. D'après la propriété "Si deux droites sont symétriques par rapport à un point, alors elles sont parallèles entre elles" on en déduit que la droite symétrique de (d_1) est parallèle à (d_1). La droite symétrique de (d_1) est donc la droite parallèle à (d_1) et passant par le point B : c'est la droite (d_2). Par conséquent, les angles alternes internes formés sont symétriques par rapport à I et ont donc même mesure.

- Soient (d_1) et (d_2) deux droites coupées par une sécante δ en deux points A et B respectivement. Soit I le milieu de $[AB]$. On peut supposer que les angles alternes internes égaux sont les angles $\widehat{DAB}$ et $\widehat{ABC}$ où D et C sont placés de part et d'autre de la sécante δ, C sur (d_1) et D sur (d_2).
  Les deux points A et B sont symétriques par rapport au point I. Soit C' le symétrique de C par rapport à I. (AB) a pour symétrique elle-même par rapport à I donc C' se trouve de l'autre côté de la droite (AB) par rapport à I. Les angles $\widehat{CBA}$ et $\widehat{BAC'}$ sont en outre symétriques par rapport à I. La symétrie centrale conserve les angles donc ces deux angles sont égaux. La demi-droite symétrique de la demi-droite $[BC)$ par rapport à I est donc la demi-droite d'extrémité A située de l'autre côté de C par rapport à (AB) et faisant un angle égal à $\widehat{ABC}$. Or $\widehat{DAB}$ a la même mesure que $\widehat{CBA}$ et D se situe de l'autre côté de C par rapport à (AB) donc la demi-droite $[AB)$ est la symétrique de $[BC)$ et les droites (AB) et (BC) sont donc symétriques. La droite symétrique d'une droite par rapport à un point est une droite parallèle donc les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles.

Propriété :

- Si deux droites coupées par une sécante sont parallèles, alors les angles correspondants formés sont égaux ;
- Si deux droites coupées par une sécante forment des angles correspondants égaux, alors elles sont parallèles.

Preuve :

- Soient (d_1) et (d_2) deux droites parallèles coupées par une sécante δ en deux points A et B. En considérant l'angle opposé par le sommet à l'un des deux angles correspondants on obtient des angles alternes-internes. La propriété énoncée plus haut permet donc d'affirmer que ces angles alternes-internes sont égaux et par conséquent que les angles correspondants le sont aussi.
- On se ramène au cas des angles alternes-internes en considérant l'angle opposé par le sommet à l'un des deux angles correspondants.

7.3 Somme des angles d'un triangle

Propriété :

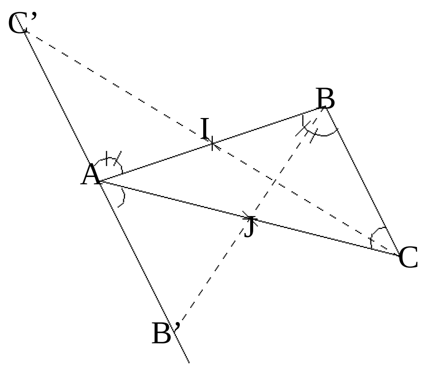
La somme des angles d'un triangle est égale à 180 ˚ .

Preuve :
Soit ABC un triangle, I le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[AC]$. On appelle B' le symétrique de B par rapport à J et C' le symétrique de C par rapport à I.
Les points C', A et B ont donc pour symétriques par rapport à I les points C, B et A. Par conséquent, $\widehat{BAC'}$, est le symétrique de $\widehat{ABC}$ par rapport à I et donc d'après la propriété "Si deux angles sont symétriques par rapport à un point alors ils ont même mesure on en déduit que $\widehat{BAC'} = \widehat{ABC}$. De plus (AC') est la droite symétrique de (BC) par rapport à I donc d'après la propriété "Si deux droites sont symétriques par rapport à un point, alors elles sont parallèles" on en conclut que (AC') et (BC) sont parallèles.
Les points B', A et C ont pour symétriques les points B, C et A par rapport à J. Par conséquent, $\widehat{B'AC}$ et $\widehat{BCA}$ sont symétriques par rapport à J et par la même propriété que précédemment, $\widehat{B'AC} = \widehat{BCA}$. En outre, (AB') et (BC) sont symétriques par rapport à J donc elles sont parallèles.
On sait donc que (AC') et (BC) sont parallèles et que (AB') et (BC) sont parallèles donc d'après la propriété "Si deux droites sont parallèles à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles", on en déduit que les droites (AC') et (AB') sont parallèles et comme elles ont le point A en commun, elles sont confondues. D'où A, B' et C' sont alignés.
En outre, on a donc

$$\widehat{B'AC} + \widehat{BAC} + \widehat{BAC'} = \widehat{B'AC'}$$

donc

$$\widehat{BCA} + \widehat{ACB} + \widehat{ABC} = 180°$$



7.4 Application aux triangles particuliers

Propriétés pour les triangles isocèles :

- Si un triangle est isocèle, alors les angles à la base sont égaux ;
- Si un triangle a deux angles égaux, alors c'est un triangle isocèle.

Preuve :

- Soit ABC un triangle isocèle en A. Soit I le milieu de $[CB]$ et (d) la médiatrice de $[BC]$. ABC est isocèle en A donc AB et AC sont des longueurs égales d'où, d'après la propriété "Si un point est à égale distance des extrémités d'un segment, alors il appartient à la médiatrice de ce segment", on en déduit que A appartient à (d). A est donc son propre symétrique par rapport à (d). B et C sont symétriques par rapport à (d) donc $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ sont symétriques par rapport à (d). D'après la propriété "si deux angles sont symétriques par rapport à une droite, alors ils ont même mesure" on en déduit que $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$.
- Soit ABC un triangle ayant les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ égaux. Soit I le milieu du segment $[BC]$ et (d) la médiatrice de $[BC]$. On appelle A' l'intersection de (d) avec (AB).
  B et C sont symétriques par rapport à (d). $\widehat{A'BC}$ et $\widehat{ABC}$ sont égaux par construction de A'. Le symétrique d'un angle par rapport à une droite est un angle de même mesure donc $\widehat{A'BC}$ a pour symétrique $\widehat{ABC}$ par rapport à (d) A' appartient à (d) par construction donc le symétrique A' est lui-même et il appartient au côté $[CA)$. A' appartient donc à $[CA)$ mais aussi par construction à (AB) donc A' est confondu avec A. Comme A' c'est à dire A appartient à la médiatrice (d) de $[BC]$, d'après la propriété "Si un point appartient à la médiatrice d'un segment, alors il est à égale distance des extrémités d'un segment" on en déduit que AB et AC sont égales, c'est à dire ABC est un triangle isocèle en A.

Propriétés pour les triangles équilatéraux :

- Si un triangle est équilatéral, alors ses angles mesurent 60 ° ;
- Si un triangle a trois angles égaux, alors c'est un triangle équilatéral.

preuve :

- Soit ABC un triangle équilatéral. Il est donc isocèle en A. D'après la propriété "Si un triangle est isocèle, alors les angles à la base sont égaux", donc les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ ont même mesure.
  De même, ABC est isocèle en B donc les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{CAB}$ sont égaux.
  Par conséquent, on a $\widehat{ABC} = \widehat{BAC} = \widehat{ACB}$.
  Dans un triangle, la somme des mesures des angles est égale à 180 ° donc $\widehat{ABC} + \widehat{BAC} + \widehat{ACB} = 180°$. Comme les trois angles sont égaux, on a $3\widehat{ABC} = 180°$ d'où $\widehat{ABC} = \frac{180}{3}$ donc $\widehat{ABC} = 60°$.
- Soit ABC un triangle ayant trois angles égaux. Les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ sont égaux. D'après la propriété "si un triangle a deux angles égaux, alors c'est un triangle isocèle", on en déduit que ABC est isocèle de sommet A et donc que les longueurs AB et AC sont égales.
  Mais les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BAC}$ sont aussi égaux donc d'après la même propriété que précédemment, le triangle ABC est isocèle en C et donc que les longueurs BC et AC sont égales.

Propriétés concernant les triangles rectangles :

- Les deux angles aigus d'un triangle rectangle sont complémentaires ;
- Si un triangle a deux angles complémentaires, alors il est rectangle.

Preuve :

- Soit ABC un triangle rectangle en A. On a donc $\widehat{BAC} = 90°$. La somme des angles d'un triangle est égale à 180 ° donc $\widehat{ABC} + \widehat{BAC} + \widehat{ACB} = 180°$ d'où $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} + 90° = 180°$ d'où $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 90°$.
- D'après la propriété de la somme des angles d'un triangle, un tel triangle a un angle de 90 ° c'est à dire droit.

Chapitre 8

Nombres relatifs

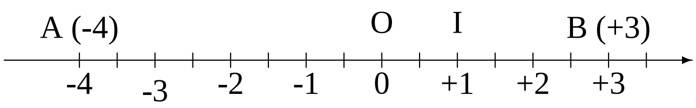
8.1 Repérage

8.1.1 Repérage sur une droite graduée

Pour graduer une droite, on choisit un point origine, un sens et une unité de longueur que l'on reporte régulièrement à partir de l'origine.

Définition :

On peut repérer les points d'une droite graduée par un nombre relatif appelé *abscisse* du point.



Exemple :
L'abscisse du point A est -4, celle de B est +3 ou 3.

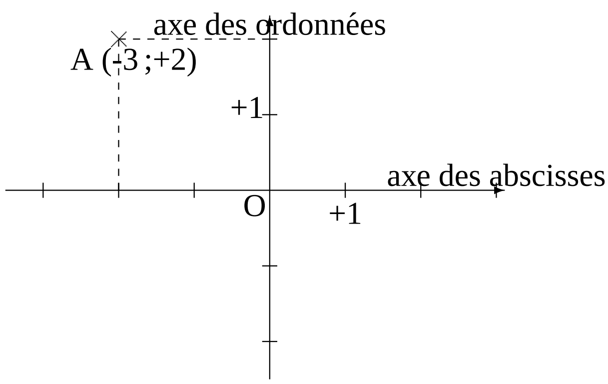
8.1.2 Repérage dans le plan

Pour construire un repère du plan, on trace deux droites graduées perpendiculaires et de même origine.

Définition :

Un point M est repérer par deux nombres x_M et y_M appelés les *coordonnées* du point :
- *l'abscisse* x_M est lue sur l'axe horizontal ;
- *l'ordonnée* y_M est lue sur l'axe vertical.

On note $M(x_M; y_M)$.



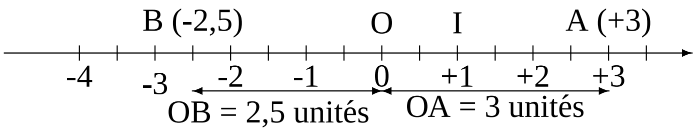
Exemple :
A a pour abscisse -3 et pour ordonnée +2, ses cordonnées sont (-3 ;+2).

8.2 Comparaison de nombres relatifs

8.2.1 Distance à zéro

Définition :

La *Distance à zéro* d'un nombre est la distance par rapport à l'origine d'une droite graduée du point dont il est l'abscisse.



Exemples :

- La distance à zéro de +3 est OA c'est à dire 3.
- La distance à zéro de -2,5 est OB c'est à dire 2,5.

8.2.2 Méthode de comparaison de nombres relatifs

Propriété :

Si deux nombres sont négatifs, le plus petit est celui qui a la plus grande distance à zéro.

Exemple :
$-3,5 < -2$

Propriété :

Si deux nombres sont de signe contraire, le plus grand est le nombre positif.

Exemple :
$-3,5 < 4$

8.3 Addition de nombres relatifs

8.3.1 Règle d'addition de deux nombres relatifs

Propriété :

Pour additionner deux nombres relatifs de *même signe* :
- on *additionne* les distances à zéro des deux nombres ;
- on met au résultat le signe commun aux deux nombres.

Exemples :

- $(-2,5) + (-4) = -6,5$
- $(+2,5) + (+4) = +6,5$

Propriété :

Pour additionner deux nombres relatifs de *signes contraires* :
- on *soustrait* la plus petite distance à zéro à la plus grande ;
- on met le signe du nombre qui a la plus grande distance à zéro.

Exemples :

- $(-2,5) + (+4) = +1,5$
- $(+2,5) + (-4) = -1,5$

8.3.2 Propriétés de l'addition

Propriété :

Si on change l'ordre des termes dans une addition, la somme ne change pas.

Exemples :

- $(-15) + (+4) = -11$
- $(+4) + (-15) = -11$

Propriété :

Si on regroupe des termes dans une addition, la somme ne change pas.

Exemple :

$$\begin{aligned}&(+2)+(-15)+(+7)+(-4)\\=&(-13)+(+7)+(-4)\\=&(-6)+(-4)\\=&-10\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}&(+2)+(-15)+(+7)+(-4)\\=&(+2)+(+7)+(-15)+(-4)\\=&(+9)+(-19)\\=&-10\end{aligned}$$

8.3.3 Opposé d'un nombre relatif

Définition :

Deux nombres relatifs a et b sont *opposés* si leur somme vaut 0.

Exemple :
+2,5 et -2,5 sont opposés car $(-2,5)+(+2,5)=0$.

Propriété :

Tout nombre relatif admet pour unique opposé le nombre qui a la même distance à zéro mais est de signe contraire.
On le note $opp(a)$.

Preuve :
Soit a un nombre relatif.
On $a+(-a)=0$ donc a et $-a$ sont opposés. Si b et b' sont deux opposé du même nombre a, on $a+b=0$ et $a+b'=0$ donc $a+b=a+b'$. Comme a et b sont opposé on obtient en ajoutant b $a+b+b=a+b'+b$ c'est à dire $b=a+b+b'$ ou encore $b=b'$ donc a n'admet qu'un seul opposé qui est $-a$.

Exemples :
- -2,5 est l'opposé de 2,5 ;
- 3,5 est l'opposé de -3,5 ;
- l'opposé de l'opposé de 6,7 est 6,7.

8.4 Soustraction de nombres relatifs

Propriété et définition :

La différence $b - a$ de deux nombres relatifs est le nombre qui ajouté à a donne b.

Preuve :
Il existe un nombre qui ajouté à a donne b. En effet,
$a + (opp(a) + b) = a + opp(a) + b = 0 + b = b$ donc $opp(a) + b$ est un nombre qui ajouté à a donne b.
Il n'existe qu'un seul nombre qui ajouté à a donne b. En effet, si c et c' sont deux nombres qui ajoutés à a donnent b alors $a + c = b$ et $a + c' = b$ donc
$a + c + opp(a) = b + opp(a)$ et $a + c' + opp(a) = b + opp(a)$ c'est à dire
$c = b + opp(a)$ et $c' = b + opp(a)$ donc $c = c'$.

Propriété :

Soustraire un nombre relatif revient à additionner son opposé. C'est à dire,

$$b - a = b + (-a)$$

Exemples :

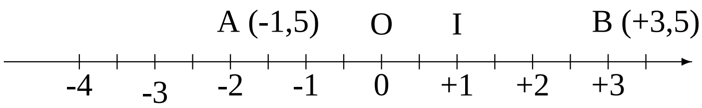
- $A = (-2) - (+9)$
  $A = (-2) + (-9)$
  $A = -11$
- $B = (-2) - (-9)$
  $B = (-2) + (+9)$
  $B = +7$

8.5 Distance sur une droite graduée

Propriété :

> A et B étant deux points d'une droite graduée, la distance AB est la différence entre la plus grande abscisse et la plus petite.

Preuve :
On peut supposer quitte à échanger les points A et B que $x_A < x_B$.
Si $x_A > 0$ et $x_B > 0$ alors $AB = x_B - x_B$.
Si $x_A < 0$ et $x_B > 0$ alors $AB = OA + OB = (-x_A) + x_B = x_B - x_A$.
Si $x_A < 0$ et $x_B < 0$ alors $AB = (-x_A) - (-x_B) = -x_A + x_B = x_B - x_A$.



Exemple :

$$
\begin{aligned}
AB &= x_B - x_A \\
AB &= (+3,5) - (-1,5) \\
AB &= (+3,5) + (+1,5) \\
AB &= +5
\end{aligned}
$$

8.6 Calculs avec des nombres relatifs

8.6.1 Calculs avec additions et soustractions successives

Méthode :

> Pour effectuer un enchaînement de calculs avec des nombres relatifs, on se ramène à une somme de nombres relatifs puis on regroupe les termes positifs et les termes négatifs.

Exemple :

$$A = (-8) + (+15) - (+7) + (-3)$$
$$A = (-8) + (+15) + (-7) + (-3)$$
$$A = (-8) + (-7) + (-3) + (+15)$$
$$A = (-18) + (+15)$$
$$A = 0$$

8.6.2 Simplification d'écritures

Notation :

Pour simplifier l'écriture d'une suite d'additions et de soustractions :
- les nombres négatifs peuvent être écrits sans signe et sans parenthèse ;
- le nombre de gauche peut être écrit sans parenthèse.

Exemples :

- $A = (-8) + (+15) - (+7) + (-3)$
  $A = -8 + 15 - 7 + (-3)$
  $A = -8 + 15 - 7 - (+3)$
  $A = -8 + 15 - 7 - 3$
- $B = (+6) - (+9)$
  $B = 6 - 9$
- $C = (+9) - (+6)$
  $C = 9 - 6$

Chapitre 9

Pourcentages et statistiques

9.1 Pourcentages

Définition :

La notation $t\%$ signifie t centièmes ou encore $\frac{t}{100}$.

Propriété :

Un *pourcentage* traduit une situation de *proportionnalité*, c'est un coefficient de proportionnalité.

Exemple :
Un commerçant accorde une remise de 20 euros pour un prix initial de 160 euros.
Calcul du pourcentage de remise par rapport au prix initial :

remise	t	20
prix initial	100	160

Ce tableau est un tableau de proportionnalité et $\frac{t}{100}$ est un coefficient de proportionnalité.
C'est à dire,

$$\frac{remise}{prix_initial} = \frac{t}{100} = \frac{20}{160}$$

donc $\frac{t}{100} = 0,125$ et $t = 12,5$.
Le pourcentage de remise est donc 20%.

9.2 Statistiques

9.2.1 Vocabulaire

Définitions :

- Les données étudiées constituent une *série statistique*.
- Chaque donnée (on dit aussi *valeur*) de la série statistique peut apparaître une ou plusieurs fois. Le nombre d'apparitions de chaque valeur est appelé l'*effectif de la valeur*.
- Lorsque les valeurs sont nombreuses, on les regroupe en *classes*.

Exemple :
Une étude montre que le nombre d'appareils ménagers possédé par les 15 familles d'une résidence est : 6 ; 9 ; 4 ; 5 ; 6 ; 4 ; 5 ; 5 ; 7 ; 8 ; 5 ; 4 ; 6 ; 6 ; 3.
Cette série de nombres constitue une série statistique.
Chacun des nombres de la série est une valeur de la série. La valeur 5 apparaît 4 fois, son effectif est donc 4.
On pourrait regrouper les familles de la manière suivante : nombre de familles ayant entre 0 et 5 appareils, nombre de familles ayant entre 6 et 10 appareils, nombre de familles ayant entre 11 et 15 appareils. On a ainsi effectué un regroupement en classes de la série statistique.

9.2.2 Fréquence

Définition :

La *fréquence* exprimée en pourcentage d'une valeur dans une série statistique est le de l'effectif de cette valeur par rapport à l'effectif total de la série statistique.

c'est à dire, :

$$\text{fréquence} = \frac{\text{effectif de la classe}}{\text{effectif total}}$$

Exemple :
fréquence de la valeur 6 : $f_6 = \frac{4}{15}$ donc $f_6 \approx 0,27$ c'est à dire $f_6 \approx 27\%$.

Preuve :

effectif valeur	
effectif total	100

9.2.3 Diagrammes circulaires

Propriété :

Dans un diagramme circulaire, la mesure de *l'angle au centre* correspondant à une valeur de la série est proportionnel à l'effectif et à la fréquence pour cette valeur.

Exemple :
Résultats d'un sondage portant sur 1240 personnes :

	pour	contre	sans opinion	total
effectif	496	434	310	1240
fréquence en %	$\frac{496}{1240} \times 100 = 40$	$\frac{434}{1240} \times 100 = 35$	$\frac{310}{1240} \times 100 = 25$	100
angle au centre	$496 \times \frac{360}{1240} = 144°$	$43 \times \frac{360}{1240} = 126°$	$310 \times \frac{360}{1240} = 90°$	360°

Chapitre 10

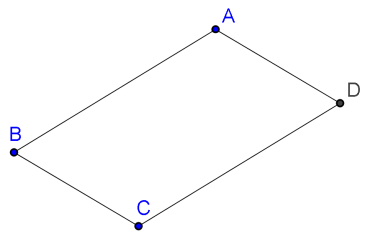
Quadrilatères

10.1 Parallélogrammes

10.1.1 Définition et propriétés

Définition :

Un *parallélogramme* est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles.



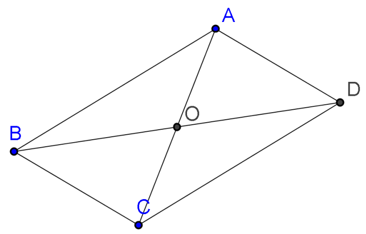
Propriétés :

- Un parallélogramme a un centre de symétrie qui est le point d'intersection des diagonales.
- Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors :
  - les diagonales se coupent en leur milieu ;
  - les côtés opposés ont la même longueur ;
  - les angles opposés sont égaux.

Preuve :

- Soit O le milieu de $[AC]$. On a donc C symétrique de A par rapport à O. On sait que C est le symétrique de A par rapport à O. D'après la propriété : "la figure symétrique d'une droite par une symétrie centrale est une droite qui lui est parallèle ", on conclut que la droite symétrique de (AB) est la droite passant par C et parallèle à (AB) c'est à dire (CD).
  De même on montre que la droite (BC) a pour symétrique (AD).
  Le symétrique du point B se trouve donc à l'intersection de la droite symétrique de (BC) et de la droite symétrique de (AB) : c'est donc l'intersection de (AD) et de (CD) c'est à dire D. Donc ABCD est son propre symétrique et O est un centre de symétrie.

- En outre, D est le symétrique de B par rapport à O donc O est le milieu de $[BD]$. Les diagonales se coupent donc en leur milieu.
- On sait que le symétrique du segment $[AB]$ est $[CD]$ et le symétrique de $[BC]$ est $[AD]$ donc d'après la propriété "la symétrie centrale conserve les longueurs", on conclut que les côtés opposés ont même longueur.
- On sait que A et C sont symétriques, B et D sont symétriques donc que le symétrique de l'angle $\widehat{ABC}$ est $\widehat{CDA}$. D'après la propriété "la symétrie centrale conserve les angles" on conclut que les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{CDA}$ sont égaux.



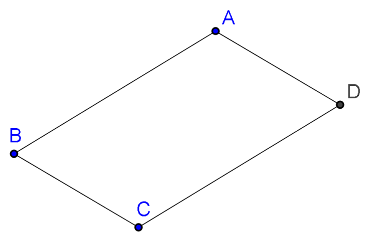
10.1.2 Reconnaissance et premières constructions

Propriété :

> Si les côtés opposés d'un quadrilatère sont parallèles, alors ce quadrilatère est un parallélogramme.

Preuve :
C'est la définition.

Application :
Construction d'un parallélogramme connaissant trois sommets.

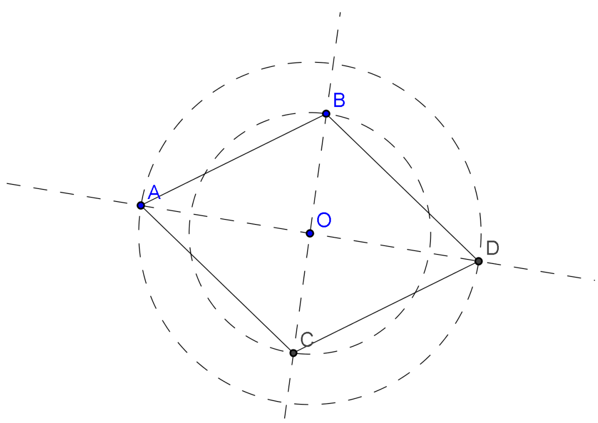


Propriété :

Si les diagonales d'un quadrilatère ont le même milieu alors ce quadrilatère est un parallélogramme.

Preuve :
Soit ABCD un tel quadrilatère et soit O le milieu de $[BD]$ et de $[AC]$. B et D sont donc symétriques par rapport à O et A et C sont symétriques par rapport à O. La droite symétrique de (AB) est donc (CD) et la droite symétrique de (BC) est (AD).
D'après la propriété "La figure symétrique d'une droite par une symétrie centrale est une droite qui lui est parallèle", on en conclut que (AB) et (CD) sont parallèles et (BC) et (AD) sont parallèles. D'où ABCD est un parallélogramme.

Application :
Construction d'un parallélogramme connaissant son centre et un côté.



Propriété :

> Si un quadrilatère convexe a deux côtés opposés parallèles et de même longueur, alors c'est un parallélogramme.

Preuve :
Soit ABCD un quadrilatère convexe ayant les côtés $[AB]$ et $[CD]$ égaux et tel que les droites (AB) et (CD) soient parallèles. On considère le milieu O de $[AC]$. C est donc le symétrique de A par rapport à O. D'après la propriété : "la figure symétrique d'une droite par rapport à un point est une droite qui lui est parallèle", on en déduit que la figure symétrique de la droite (AB) par rapport à O est la droite parallèle à (AB) et passant par le point C : il s'agit donc de (CD). En outre, comme ABCD est convexe, O est à l'intérieur de ABCD, les demi-droites $[AB)$ et $[CD)$ ont donc des directions opposées et d'après la propriété "la figure symétrique d'une demi-droite par une symétrie centrale est une demi-droite d'origine le symétrique de l'origine et de direction contraire", la figure symétrique de la demi-droite $[AB)$ est la demi-droite $[CD)$. D'après la propriété "la figure symétrique d'un segment dans une symétrie centrale est un segment de même longueur", on en déduit que le segment $[AB]$ a pour symétrique un segment de même longueur, dont l'une des extrémités est C et porté par la demi-droite $[CD)$: il s'agit donc du segment $[CD]$. De plus, le symétrique du point B est le point de $[CD]$ situé à la distance CD de C c'est donc D. Par conséquent A et C sont symétriques et B et D sont symétriques par rapport à O, donc les segments $[BD]$ et $[AC]$ ont le même milieu O. D'après la propriété "si un quadrilatère à ses diagonales qui se coupent en leur milieu, alors c'est un parallélogramme", on en déduit que ABCD est un parallélogramme.

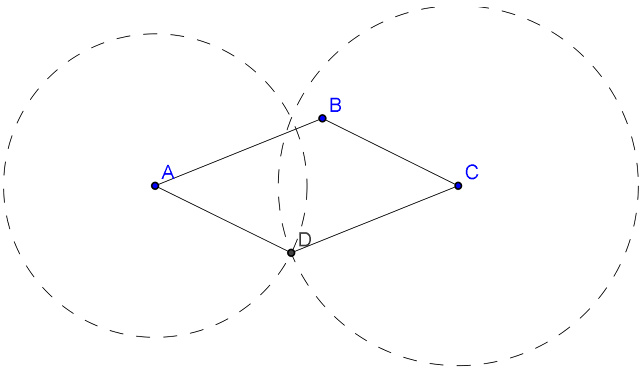
Propriété :

> Si les côtés opposés d'un quadrilatère convexe ont la même longueur, alors ce quadrilatère est un parallélogramme.

Preuve :
Soit ABCD un tel quadrilatère. Soit O le milieu de $[AC]$. Le symétrique de A par rapport à O est donc C. Le symétrique de $[AB]$ par rapport à O est un segment de même longueur dont l'une des extrémités est C. Le symétrique de $[BC]$ est un segment de même longueur dont l'une des extrémités est A. Le symétrique de B se trouve à l'intersection des deux segments symétriques précédents. Ces conditions définissent deux points qui sont les intersections du cercle de centre C et de rayon AB et du cercle de centre A et de rayon BC. Mais ABCD est convexe, donc D seulement est situé dans le demi-plan limité par (AC) ne contenant pas B. Or le symétrique B' de B par rapport à O se trouve

dans le demi-plan limité par (AO) qui est globalement invariante par rapport à O et ne contenant pas B. Donc D est le symétrique de B par rapport à O.

Application :
Construction à la règle et au compas d'un parallélogramme connaissant trois sommets.

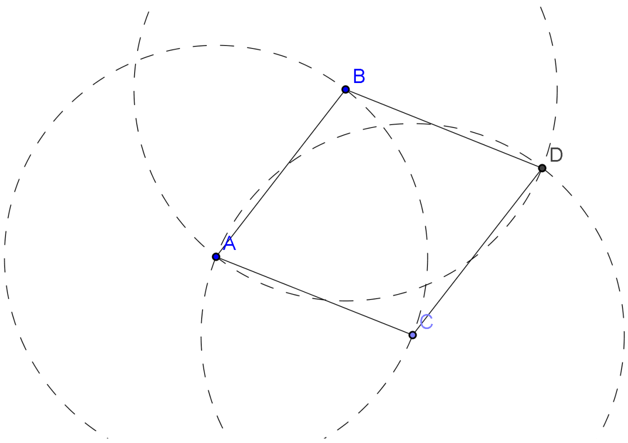


10.2 Parallélogrammes particuliers

10.2.1 Losange

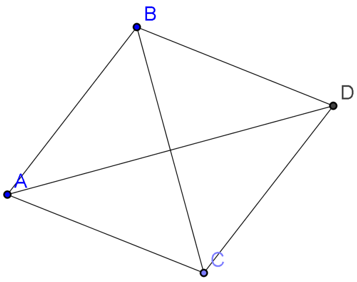
Définition :

Un *losange* est un quadrilatère dont tous les côtés ont la même longueur.



Propriétés :

- Si un quadrilatère est un losange, alors ses côtés sont parallèles et ont la même longueur.
- Si un quadrilatère est un losange, alors ses diagonales se coupent en leur milieu perpendiculairement.



Propriétés :

- Si un quadrilatère a ses quatre côtés de même longueur, alors c'est un losange.
- Si un parallélogramme a deux côtés consécutifs égaux, alors c'est un losange.
- Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent perpendiculairement en leur milieu, alors c'est un losange.
- Si un parallélogramme a ses diagonales perpendiculaires, alors c'est un losange.

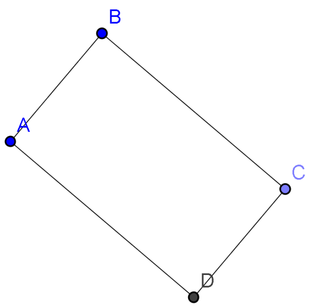
Preuve :

- C'est la définition d'un losange.
- Soit ABCD un parallélogramme ayant deux côtés AB et BC égaux. On sait que ABCD est un parallélogramme donc d'après la propriété "Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses côtés opposés sont égaux", on en déduit que AB et CD sont égales et que BC et AD sont égales. Comme AB et BC sont égales, on a finalement $AB = BC = CD = AD$ donc ABCD est un losange.
- Soit ABCD un quadrilatère dont les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent perpendiculairement en leur milieu O. On sait que la diagonale $[AC]$ coupe le segment $[BD]$ en son milieu perpendiculairement donc (AC) est la médiatrice du segment $[BD]$. D'après la propriété "Si un point appartient à la médiatrice d'un segment, alors il est à égale distance des extrémités du segment", on en déduit que A est à égale distance de B et D c'est à dire que AB et AD sont égales et de même C est à égale distance de B et D c'est à dire BC et CD sont égales. De même (BD) coupe le segment $[AC]$ en son milieu perpendiculairement donc (BD) est la médiatrice de $[AC]$ et on en déduit d'après la propriété déjà citée que AB et BC sont égales et que AD et DC sont égales. Finalement, de $AB = AD$, $AB = BC$ et $BC = C$D on déduit que $AB = AD = BC = CD$ donc le quadrilatère ABCD est un losange.
- Soit ABCD un parallélogramme ayant ses diagonales perpendiculaires. On sait donc que ABCD est un parallélogramme, donc d'après la propriété "Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses diagonales se coupent en leur milieu" on déduit que ABCD a ses diagonales qui se coupent en leur milieu. Finalement, le quadrilatère ABCD a ses diagonales qui se coupent perpendiculairement en leur milieu donc d'après la propriété démontrée au point précédent c'est un losange.

10.2.2 Rectangle

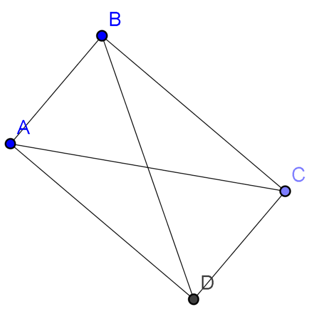
Définition :

Un rectangle est un quadrilatère qui a quatre angles droits.



Propriétés :

- Si un quadrilatère est un rectangle, alors ses côtés opposés sont parallèles et de même longueur.
- Si un quadrilatère est un rectangle, alors ses diagonales ont même longueur et se coupent en leur milieu.



Preuve :

- Soit ABCD un rectangle. De (AB) perpendiculaire à (BC) et (CD) perpendiculaire à (BC), on déduit d'après la propriété "si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles" que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
  De (BC) perpendiculaire à (AB) et (CD) perpendiculaire à (AB) on déduit de la propriété précédente que les droites (BC) et $CD)$ sont parallèles.
  Les côtés opposés du rectangle sont donc parallèles.
- Soit ABCD un rectangle. On vient de montrer que ses côtés opposés sont parallèles donc c'est un parallèlogramme. D'après la propriété "si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses diagonales se coupent en leur milieu", on déduit que les diagonales de ABCD se coupent en leur milieu.
  On sait que les médiatrices des côtés sont des axes de symétrie du rectangle donc A et B part sont symétriques par rapport à une droite passant par O et la symétrie axiale conservant les longueurs, on en déduit donc que OA et OB sont des longueurs égales donc que BD et AC sont des longueurs égales.

Propriétés :

- Si un quadrilatère a trois angles droits, alors c'est un rectangle.
- Si un parallélogramme a un angle droit, alors c'est un rectangle.
- Si un parallélogramme a ses diagonales de même longueur, alors c'est un rectangle.
- Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu et de même longueur, alors c'est un rectangle

Preuve :

- Soit ABCD un quadrilatère ayant les trois angles $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCD}$ et $\widehat{CDA}$ droits. On sait donc que (AB) est perpendiculaire à (BC) et que (CD) est perpendiculaire à (BC). D'après la propriété "si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles", on en déduit que les droites (AB) et (CD) sont parallèles. On sait donc que (AD) et (CD) sont perpendiculaires et que (AB) et (CD) sont parallèles donc d'après la propriété "si deux droites sont parallèles, alors toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre" on en déduit que les droites (AD) et (AB) sont perpendiculaires c'est à dire que le quadrilatère ABCD a quatre angles droits.
- Soit ABCD un parallélogramme ayant l'angle $\widehat{ABC}$ droit. D'après la propriété "si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses angles opposés sont égaux" on en déduit que $\widehat{ADC}$ est un angle droit. On sait que ABCD est un

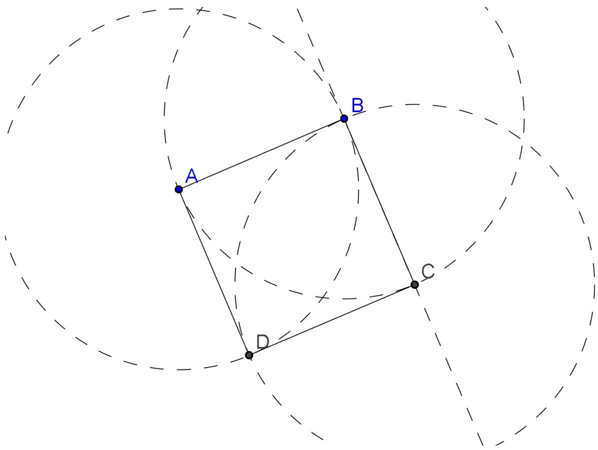
parallélogramme donc d'après la propriété "si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses côtés opposés sont parallèles" on en déduit que (AB) et (CD) sont parallèles et que (BC) et (AD) sont parallèles. On sait donc que (AB) et (CD) sont parallèles et que (BC) et perpendiculaire à (AB). D'après la propriété "si deux droites sont parallèles, alors toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre" on en déduit que (BC) est perpendiculaire à (CD) c'est à dire que l'angle $\widehat{BCD}$ est droit. Le quadrilatère ABCD a donc trois angles droits, d'après la propriété justifiée précédemment, on en déduit que c'est un rectangle.

- Soit ABCD un parallélogramme dont les diagonales ont même longueur. On appelle O le point d'intersection de ces diagonales.
  ABCD est un parallélogramme. D'après la propriété "si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses diagonales se coupent en leur milieu", on déduit que O est le milieu de $[AC]$ et de $[BD]$. De plus, les diagonales ont même longueur donc $OA = OB = OC = OD$. Les triangles DOA et BOA sont donc isocèles en O.
  D'après la propriété "dans un triangle les angles à la base sont égaux", on déduit que $\widehat{OAB}$ et $\widehat{OBA}$ sont égaux et que $\widehat{OBC}$ et $\widehat{OCB}$ sont égaux. On sait que la somme des angles d'un triangle est égale à 180 ˚ donc
  $\widehat{AOB} + 2 \times \widehat{ABO} = 180°$ et $2 \times \widehat{OBC} + \widehat{BOC} = 180°$. Or
  $\widehat{ABC} = \widehat{ABO} + \widehat{OBC}$ donc
  $\widehat{AOB} + 2 \times \widehat{ABO} + 2 \times \widehat{OBC} + \widehat{BOC} = 180° + 180°$ ce qui s'écrit
  $\widehat{AOB} + 2 \times (\widehat{ABO} + \widehat{OBC}) + \widehat{BOC} = 360°$ ou encore
  $\widehat{AOB} + \widehat{BOC} + 2 \times \widehat{ABC} = 360°$. Mais $\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOC}$ sont supplémentaires donc on l'égalité précédente s'écrit encore $180° + 2 \times \widehat{ABC} = 180°$ d'où l'on déduit que $\widehat{ABC} = 90°$.
  Le parallélogramme ABCD a donc un angle droit, par une propriété précédente, c'est donc un rectangle.

10.2.3 Carré

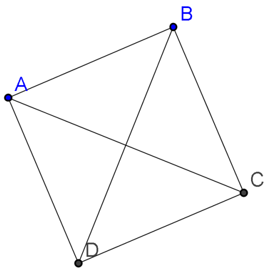
Définition :

Un *carré* est un quadrilatère qui a ses quatre côtés égaux et ses quatre angles droits.



Propriétés :

Si un quadrilatère est un carré, alors :
- ses côtés opposés ont même longueur et sont parallèles ;
- ses quatre angles sont droits ;
- ses diagonales ont même longueur et sont perpendiculaires.



Preuve :
- Comme un carré a ses quatre côtés égaux, c'est aussi un losange, il a donc toutes les propriétés du losange : ses côtés opposés sont égaux et parallèles, ses diagonales sont perpendiculaires.
- Comme un carré a ses quatre angles droits, c'est aussi un rectangle, il donc toutes les propriétés du rectangle : ses quatre angles sont droits et ses diagonales ont la même longueur.

Propriétés :

- Si un quadrilatère est à la fois un losange et un rectangle, alors c'est un carré.
- Si un losange a un angle droit, alors c'est un carré.
- Si un losange a ses diagonales de même longueur, alors c'est un carré.
- Si un rectangle a deux côtés consécutifs égaux, alors c'est un carré.
- Si un rectangle a ses diagonales perpendiculaires, alors c'est un carré.

Preuve :
Les quatre dernières propriétés découlent immédiatement de la première propriété et des propriétés sur le losange et le rectangle. Un quadrilatère qui est un rectangle et un losange a quatre angle droits et quatre côtés égaux donc, par définition, c'est un carré.

Chapitre 11

Égalités

11.1 Égalités

Exemple :

- 1=1 est une égalité.
- 1=2 est aussi une égalité.

L'une est vraie, l'autre fausse.

Principe :

Une égalité mathématiques est soit vraie ou fausse.

11.2 Recherche de nombres manquants pour qu'une égalité soit vraie

Exemples :

- Le nombre x pour lequel l'égalité $3,5 + x = 12$ est vraie est le nombre qu'il faut ajouter à $3,5$ pour obtenir 12.
  On l'obtient par l'opération $12 - 3,5$.
  D'où $x = 8,5$.
- Le nombre x pour lequel l'égalité $11 - x = 5$ est vraie est le nombre qu'il faut retrancher à 11 pour obtenir 5.
  On l'obtient par l'opération $11 - 5 = 6$.
  D'où $x = 6$.
- Le nombre x pour lequel l'égalité $'x = 16$ est vraie est le nombre par lequel multiplier 4 pour obtenir 16.
  On l'obtient par l'opération $16 \div 4 = 4$.
  Donc $x = 4$.
- Le nombre x pour lequel l'égalité $\frac{10}{x} = 2$ est vraie est le nombre par lequel diviser 10 pour obtenir 2.
  On l'obtient par l'opération $\frac{10}{2} = 5$.
  Donc $x = 5$.

11.3 Tests d'égalités d'expressions littérales

Méthode :

Pour tester l'égalité de deux expressions littérales A et B, on remplace dans les deux expressions la lettre par une même valeur,

- si les résultats obtenus sont différents, on peut conclure que A n'est pas égal à B ;
- si les résultats obtenus sont égaux, on ne peut pas conclure que A est égal à B.

Exemples :

- $3x + 2 = 5x$:
  Pour $x = 2$.
  D'une part $3 \times 2 + 2 = 8$.
  D'autre part, $5 \times 2 = 10$.
  $8 \neq 10$ donc l'égalité n'est pas vraie pour $x = 2$ et n'est donc pas vraie.
- $3x + 3 = 3(x + 1)$:
  Pour $x = 2$, d'une part, $3 \times 2 + 3 = 9$.
  D'autre part $3 \times (2 + 1) = 9$.
  $9 = 9$ donc on ne peut donc pas conclure.
  Mais d'après la propriété de distributivité, $3(x + 1) = 3 \times x + 3 \times 1 = 3x + 3$.
  L'égalité est donc vraie pour toute les valeurs de x donc elle est vraie.

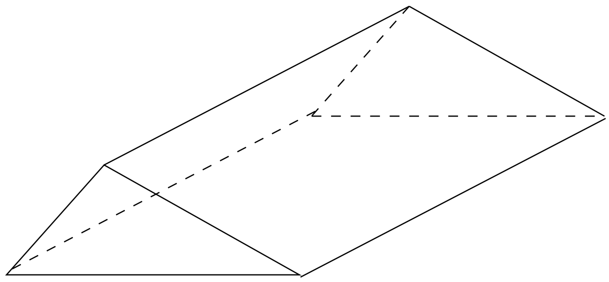
Chapitre 12

Espace

12.1 Description et représentation

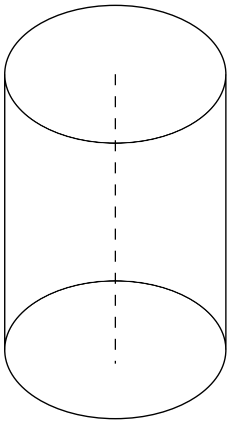
12.1.1 Prisme droit

Description :
Dans un *prisme droit*,
– les deux bases sont parallèles (ici ce sont deux triangles) ;
– les faces latérales sont toujours des rectangles.



Remarque :
Les faces latérales sont perpendiculaires aux bases.

12.1.2 Cylindre de révolution



Définition :

Un *cylindre de révolution* est le solide engendré par la rotation d'un rectangle autour d'un axe.

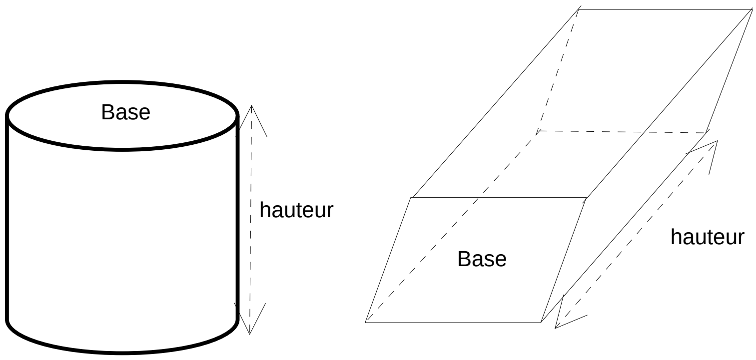
Description :

– Dans un cylindre, les deux bases sont parallèles et sont des disques de même rayon.
– Dans un cylindre de révolution la hauteur est perpendiculaire à la base.

12.2 Volumes

Propriété :

Le *volume* d'un prisme droit ou d'un cylindre de révolution s'obtient en multipliant l'aire de sa base par sa hauteur.



12.3 Aire latérale

Définition :

L'*aire latérale* d'un prisme droit ou d'un cylindre est la somme des aires de ses faces latérales.

Index