Angles

F.Gaudon

14 février 2005

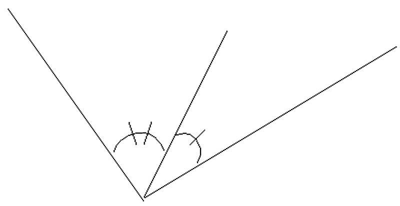
Table des matières

1 Différents types d'angles

1.1 Angles adjacents

Définition :

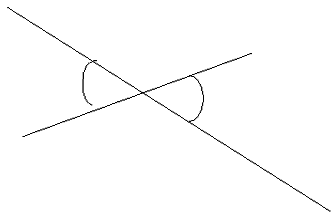
Deux angles sont adjacents s'ils ont le même sommet, un côté commun et s'ils sont situés de part et d'autre du côté commun.



1.2 Angles opposés par le sommet

Définition :

Deux angles sont opposés par le sommet s'ils ont le même sommet et s'ils sont symétriques par rapport au sommet commun.



Propriété :

Si deux angles sont opposés par le sommet, alors ils ont même mesure.

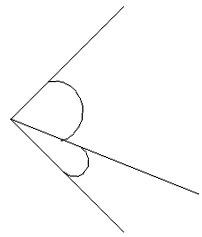
Preuve :

Conséquence immédiate de la conservation des angles par la symétrie centrale.

1.3 Angles complémentaires

Définition :

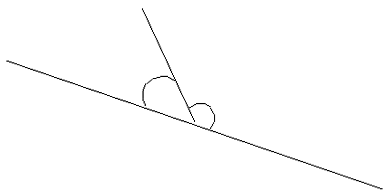
Deux angles sont complémentaires si leur somme vaut 90°.



1.4 Angles supplémentaires

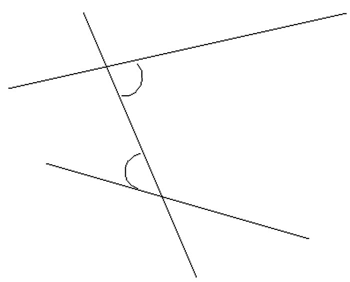
Définition :

Deux angles sont supplémentaires si leur somme vaut 180°.



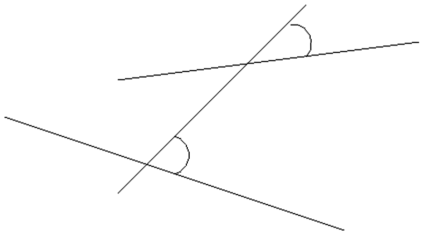
Définition :

Soient deux droites et une troisième droite sécante avec les deux droites. Deux angles sont alternes internes s'ils sont situés à l'intérieur des deux droites et de part et d'autre de la sécante.



Définition :

Soient deux droites et une troisième droite sécante avec les deux droites. Deux angles sont correspondants s'ils sont situés du même côté de la sécante, l'un étant entre les deux droites, l'autre pas.



2 Parallélisme et angles

Propriété :

- Si deux droites coupées par une sécante sont parallèles, alors les angles alternes-internes formés sont égaux ;
- Si deux droites coupées par une sécante forment des angles alternes-internes égaux, alors elles sont parallèles.

Preuve :

- Soient (d_1) et (d_2) deux droites parallèles coupées par une sécante δ en deux points A et B. Soit I le milieu de $[AB]$. Les deux points A et B sont donc symétriques par rapport au point I. Le point A appartient à la droite (d_1) donc son symétrique B appartient à la droite symétrique de la droite (d_1) par rapport au point I. D'après la propriété "Si deux droites sont symétriques par rapport à un point, alors elles sont parallèles entre elles" on en déduit que la droite symétrique de (d_1) est parallèle à (d_1). La droite symétrique de (d_1) est donc la droite parallèle à (d_1) et passant par le point B : c'est la droite (d_2). Par conséquent, les angles alternes internes formés sont symétriques par rapport à I et ont donc même mesure.

– Soient (d_1) et (d_2) deux droites coupées par une sécante δ en deux points A et B respectivement. Soit I le milieu de $[AB]$. On peut supposer que les angles alternes internes égaux sont les angles $\widehat{DAB}$ et $\widehat{ABC}$ où D et C sont placés de part et d'autre de la sécante δ, C sur (d_1) et D sur (d_2). Les deux points A et B sont symétriques par rapport au point I. Soit C' le symétrique de C par rapport à I. (AB) a pour symétrique elle-même par rapport à I donc C' se trouve de l'autre côté de la droite (AB) par rapport à I. Les angles $\widehat{CBA}$ et $\widehat{BAC'}$ sont en outre symétriques par rapport à I. La symétrie centrale conserve les angles donc ces deux angles sont égaux. La demi-droite symétrique de la demi-droite $[BC)$ par rapport à I est donc la demi-droite d'extrémité A située de l'autre côté de C par rapport à (AB) et faisant un angle égal à $\widehat{ABC}$. Or $\widehat{DAB}$ a la même mesure que $\widehat{CBA}$ et D se situe de l'autre côté de C par rapport à (AB) donc la demi-droite $[AB)$ est la symétrique de $[BC)$ et les droites (AB) et (BC) sont donc symétriques. La droite symétrique d'une droite par rapport à un point est une droite parallèle donc les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles.

Propriété :

- Si deux droites coupées par une sécante sont parallèles, alors les angles correspondants formés sont égaux ;
- Si deux droites coupées par une sécante forment des angles correspondants égaux, alors elles sont parallèles.

Preuve :

– Soient (d_1) et (d_2) deux droites parallèles coupées par une sécante δ en deux points A et B. En considérant l'angle opposé par le sommet à l'un des deux angles correspondants on obtient des angles alternes-internes. La propriété énoncée plus haut permet donc d'affirmer que ces angles alternes-internes sont égaux et par conséquent que les angles correspondants le sont aussi.
– On se ramène au cas des angles alternes-internes en considérant l'angle opposé par le sommet à l'un des deux angles correspondants.

3 Somme des angles d'un triangle

Propriété :

La somme des angles d'un triangle est égale à 180°.

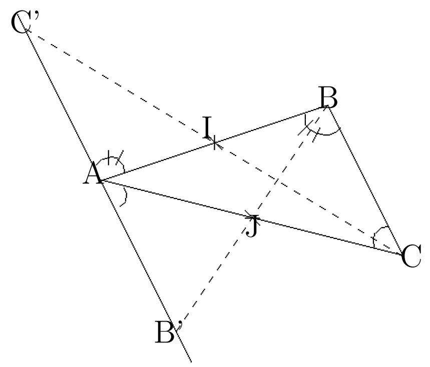
Preuve :

Soit ABC un triangle, I le milieu de [AB] et J le milieu de [AC]. On appelle B' le symétrique de B par rapport à J et C' le symétrique de C par rapport à I.
Les points C', A et B ont donc pour symétriques par rapport à I les points C, B et A. Par conséquent, $\widehat{BAC'}$, est le symétrique de $\widehat{ABC}$ par rapport à I et donc d'après la propriété "Si deux angles sont symétriques par rapport à un point alors ils ont même mesure on en déduit que $\widehat{BAC'} = \widehat{ABC}$. De plus (AC') est la droite symétrique de (BC) par rapport à I donc d'après la propriété "Si deux droites sont symétriques par rapport à un point, alors elles sont parallèles" on en conclut que (AC') et (BC) sont parallèles.
Les points B', A et C ont pour symétriques les points B, C et A par rapport à J. Par conséquent, $\widehat{B'AC}$ et $\widehat{BCA}$ sont symétriques par rapport à J et par la même propriété que précédemment, $\widehat{B'AC} = \widehat{BCA}$. En outre, (AB') et (BC) sont symétriques par rapport à J donc elles sont parallèles.
On sait donc que (AC') et (BC) sont parallèles et que (AB') et (BC) sont parallèles donc d'après la propriété "Si deux droites sont parallèles à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles", on en déduit que les droites (AC') et (AB') sont parallèles et comme elles ont le point A en commun, elles sont confondues. D'où A, B' et C' sont alignés.
En outre, on a donc

$$\widehat{B'AC} + \widehat{BAC} + \widehat{BAC'} = \widehat{B'AC'}$$

donc

$$\widehat{BCA} + \widehat{ACB} + \widehat{ABC} = 180^\circ$$



4 Application aux triangles particuliers

Propriétés pour les triangles isocèles :

- Si un triangle est isocèle, alors les angles à la base sont égaux ;
- Si un triangle a deux angles égaux, alors c'est un triangle isocèle.

Preuve :

- Soit ABC un triangle isocèle en A. Soit I le milieu de $[CB]$ et (d) la médiatrice de $[BC]$. ABC est isocèle en A donc AB et AC sont des longueurs égales d'où, d'après la propriété "Si un point est à égale distance des extrémités d'un segment, alors il appartient à la médiatrice de ce segment", on en déduit que A appartient à (d). A est donc son propre symétrique par rapport à (d). B et C sont symétriques par rapport à (d) donc $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ sont symétriques par rapport à (d). D'après la propriété "si deux angles sont symétriques par rapport à une droite, alors ils ont même mesure" on en déduit que $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$.
- Soit ABC un triangle ayant les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ égaux. Soit I le milieu du segment [BC] et (d) la médiatrice de $[BC]$. On appelle A' l'intersection de (d) avec (AB).

  B et C sont symétriques par rapport à (d). $\widehat{A'BC}$ et $\widehat{ABC}$ sont égaux par construction de A'. Le symétrique d'un angle par rapport à une droite est un angle de même mesure donc $\widehat{A'BC}$ a pour symétrique $\widehat{ABC}$ par rapport à (d) A' appartient à (d) par construction donc le symétrique A' est lui-même et il appartient au côté $[CA)$. A' appartient donc à $[CA)$ mais aussi par construction à (AB) donc A' est confondu avec A. Comme A' c'est à dire A appartient à la médiatrice (d) de $[BC]$, d'après la propriété "Si un point appartient à la médiatrice d'un segment, alors il est à égale distance des extrémités d'un segment" on en déduit que AB et AC sont égales, c'est à dire ABC est un triangle isocèle en A.

Propriétés pour les triangles équilatéraux :

- Si un triangle est équilatéral, alors ses angles mesurent 60°;
- Si un triangle a trois angles égaux, alors c'est un triangle équilatéral.

preuve :

- Soit ABC un triangle équilatéral. Il est donc isocèle en A. D'après la propriété "Si un triangle est isocèle, alors les angles à la base sont égaux", donc les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ ont même mesure.
  De même, ABC est isocèle en B donc les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{CAB}$ sont égaux.
  Par conséquent, on a $\widehat{ABC} = \widehat{BAC} = \widehat{ACB}$.
  Dans un triangle, la somme des mesures des angles est égale à 180° donc $\widehat{ABC} + \widehat{BAC} + \widehat{ACB} = 180°$. Comme les trois angles sont égaux, on a $3\widehat{ABC} = 180°$ d'où $\widehat{ABC} = \frac{180}{3}$ donc $\widehat{ABC} = 60°$.
- Soit ABC un triangle ayant trois angles égaux. Les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ sont égaux. D'après la propriété "si un triangle a deux angles égaux, alors c'est un triangle isocèle", on en déduit que ABC est isocèle de sommet A et donc que les longueurs AB et AC sont égales.
  Mais les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BAC}$ sont aussi égaux donc d'après la même propriété que précédemment, le triangle ABC est isocèle en C et donc que les longueurs BC et AC sont égales.

Propriétés concernant les triangles rectangles :

- Les deux angles aigus d'un triangle rectangle sont complémentaires;
- Si un triangle a deux angles complémentaires, alors il est rectangle.

Preuve :

- Soit ABC un triangle rectangle en A. On a donc $\widehat{BAC} = 90°$. La somme des angles d'un triangle est égale à 180˚ donc $\widehat{ABC} + \widehat{BAC} + \widehat{ACB} = 180°$ d'où $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} + 90° = 180°$ d'où $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 90°$.
- D'après la propriété de la somme des angles d'un triangle, un tel triangle a un angle de 90 ˚ c'est à dire droit.