Triangles rectangles et cercles cours 4e

F.Gaudon

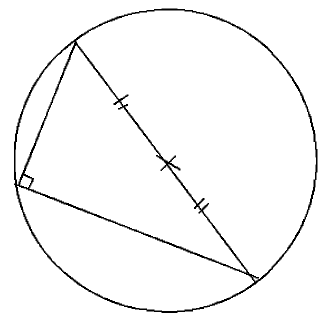
2 janvier 2005

Table des matières

1 Théorème direct

Théorème :

Si un triangle est rectangle, alors son hypoténuse est un diamètre du cercle circonscrit à ce triangle.



Preuve :

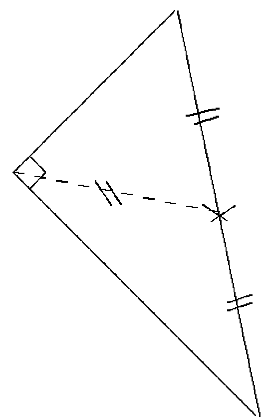
Soit ABC un triangle rectangle en A et O le milieu de l'hypoténuse $[BC]$. Soit D le point tel que O est le milieu de $[AD]$. On sait que O est le milieu de $[BC]$ et que O est le milieu de $[AD]$. D'après la propriété : "Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu alors c'est un parallélogramme", donc $ABDC$ est un parallélogramme.
On sait que $ABDC$ est un parallélogramme et que $\widehat{BAC}$ est un angle droit. D'après la propriété : "Si un parallélogramme a un angle droit alors c'est un rectangle" on en conclut que $ABDC$ est un rectangle.
On sait que $ABDC$ est un rectangle. D'après la propriété : "Si un quadrilatère est un rectangle, alors ses diagonales se coupent en leur milieu et sont de même longueur" on conclut que $OA = OB = OC$. $OA = OB$ donc d'après la propriété "Si un point se trouve à égale distance des extrémités d'un segment, alors il appartient à la médiatrice de ce segment" on en déduit que O appartient à la médiatrice de $[AB]$. De même de $OB = OC$ on déduit que O appartient à la médiatrice de $[BC]$ et de $OA = OC$ on déduit que O appartient à la médiatrice de $[AC]$. Par définition, le centre du cercle circonscrit à un triangle est le point d'intersection des médiatrices donc O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC et par suite $[BC]$ en est un diamètre.

Conséquence :

Si un triangle est rectangle, alors le milieu de l'hypoténuse est le centre du cercle circonscrit à ce triangle.

Propriété :

Si un triangle est rectangle, alors la longueur de la médiane issue de l'angle droit est égale à la moitié de la longueur de l'hypoténuse.



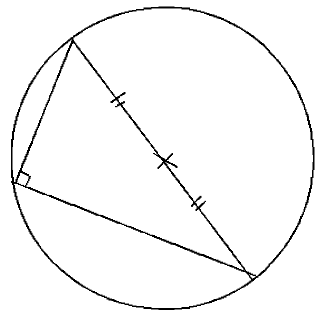
Preuve :

Soit ABC un triangle rectangle en A et O le milieu de l'hypoténuse $[BC]$. On sait que ABC est un triangle rectangle en A donc d'après la propriété "Si un triangle est rectangle, alors le milieu de l'hypoténuse est le centre du cercle circonscrit à ce triangle" on en déduit que O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. Par définition, le centre du cercle circonscrit à un triangle est le point d'intersection des médiatrices des côtés du triangle donc O est le point d'intersection des médiatrices des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$. D'après la propriété "si un point appartient à la médiatrice d'un segment, alors il se trouve à égale distance des extrémités d'un segment" on en déduit que $OA = OB$, $OA = OC$ et $OB = OC$ c'est à dire que $OA = OB = OC$ donc $OA = \frac{1}{2}BC$.

2 Théorème réciproque

Théorème :

Si un triangle inscrit dans un cercle a un diamètre pour côté, alors c'est un triangle rectangle.

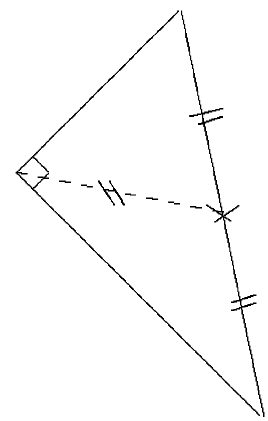


Preuve :

Soit ABC un triangle inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$ et tel que $[AB]$ est un diamètre du cercle. on appelle O le centre du cercle et on appelle D le symétrique de C par rapport à O.
On sait que $[AB]$ est un diamètre du cercle donc que O est le milieu $[AB]$ et on sait que C et D sont symétriques par rapport à O donc que O est le milieu de $[CD]$ donc d'après la propriété "Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu alors c'est un parallélogramme " on conclut que $ADBC$ est un parallélogramme.
$OD = OC$ donc O est sur le cercle $\mathcal{C}$. On sait donc que $OA = OB = OC = OD$ d'où d'après la propriété "si un parallélogramme a ses diagonales de même longueur alors c'est un rectangle " on conclut que $ADBC$ est un rectangle donc que $\widehat{BAC}$ est un angle droit.

Conséquence :

Si dans un triangle, la médiane issue d'un sommet a pour longueur la moitié de la longueur du côté opposé, alors ce triangle est rectangle.



Preuve :

Soit ABC un triangle et $[OA]$ une médiane avec O milieu de $[BC]$. Par hypothèse on a donc $OA = \frac{1}{2}BC$ et comme O est le milieu de $[BC]$, on a donc $OB = OC$ d'où finalement $OA = OB = OC$. On en déduit que O est le centre du cercle circonscrit $\mathcal{C}$ au triangle ABC. Ce triangle ABC est donc inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$ et $[BC]$ en est un diamètre. D'après la propriété "Si un triangle inscrit dans un cercle a un diamètre pour côté, alors c'est un triangle rectangle" on en conclut que ABC est un triangle rectangle.