

Théorème de Pythagore et réciproque cours 4e

F.Gaudon

17 février 2005

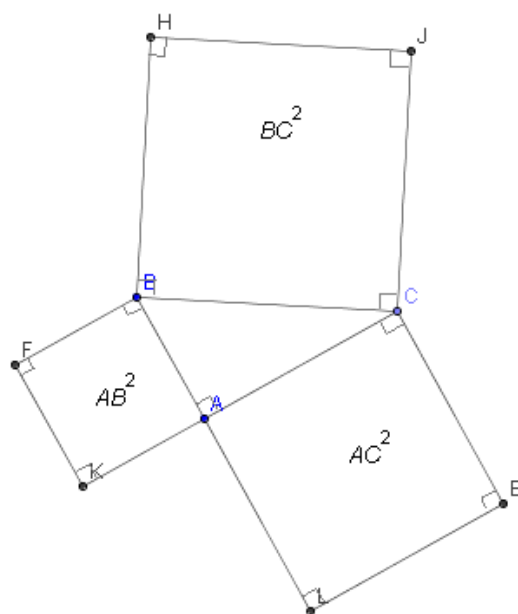
Table des matières

1	Théorème de Pythagore	2
2	Réciproque du théorème de Pythagore	3

1 Théorème de Pythagore

Théorème :

Si un triangle est rectangle alors la somme des carrés des côtés de l'angle droit est égale au carré de l'hypoténuse.



Hypothèse :

ABC est un triangle rectangle en A .

Conclusion :

$$AB^2 + AC^2 = BC^2.$$

Preuve :

admis

2 Réciproque du théorème de Pythagore

Théorème :

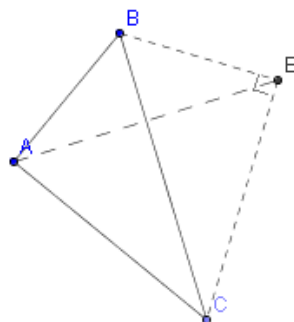
Si dans un triangle, le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle et l'hypoténuse est le côté le plus long.

Hypothèse :

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

Conclusion :

ABC est un triangle rectangle.



Preuve :

Soit ABC un triangle tel que $BC^2 = AC^2 + AB^2$. Soit EBC un triangle rectangle en E tel que $EB = AB$. Remarquons d'abord qu'un tel triangle EBC existe : en effet, d'après la propriété "si un triangle a pour extrémités un diamètre d'un cercle et un point de ce cercle alors, ce triangle est rectangle en ce point", il suffit de prendre E à l'intersection du cercle de

diamètre $[BC]$ et du cercle de centre B et de rayon AB (le rayon AB étant plus petit que BC , les deux cercles sont sécants).

EBC est un triangle rectangle en E donc d'après le théorème de Pythagore, on a $BC^2 = EB^2 + EC^2$. Comme $EB = AB$ on a donc $BC^2 = AB^2 + EC^2$ et $EC^2 = BC^2 - AB^2$. Mais de $BC^2 = AC^2 + AB^2$ on déduit aussi $AC^2 = BC^2 - AB^2$. Par conséquent, $EC = AC$. De $EC = AC$ et de la propriété "si un point est à égale distance des extrémités d'un segment, alors il appartient à la médiatrice de ce segment" on déduit que C appartient à la médiatrice du segment $[AE]$. De $EB = AB$ on déduit de même que B appartient à la médiatrice de $[AE]$. Par conséquent, la médiatrice de $[AE]$ est la droite (BC) et les points A et E sont symétriques par rapport à (BC) . La symétrie axiale conserve les angles donc l'angle $\widehat{BAC}$ a même mesure que l'angle $\widehat{BEC}$ c'est à 90° . Le triangle ABC est donc rectangle en A .

Exemple :

D'une part,

$$AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2$$

$$AB^2 + AC^2 = 9 + 16$$

$$AB^2 + AC^2 = 25$$

D'autre part,

$$BC^2 = 5^2$$

$$BC^2 = 25$$

On constate que $AB^2 + AC^2 = BC^2$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est donc rectangle en A .