Opérations sur les quotients cours 4e

F.Gaudon

2 janvier 2005

Table des matières

1 Égalité de quotients

Propriété :

On ne change pas un quotient en multipliant ou en divisant son numérateur et son dénominateur par un même nombre non nul.

c'est à dire, pour tous les nombres a, b et k non nuls, :

$\frac{a}{b} = \frac{k \times a}{k \times b}$	$\frac{a}{b} = \frac{a \div k}{b \div k}$

Preuve :

Par définition,

$$\frac{k \times a}{k \times b} \times k \times b = k \times a$$

donc

$$\frac{k \times a}{k \times b} \times b = a$$

donc $\frac{k\times a}{k\times b}$ est un nombre qui, multiplié par b donne a. Or, $\frac{a}{b}$ est le nombre qui, multiplié par b donne a. D'où $\frac{k\times a}{k\times b} = \frac{a}{b}$

Exemple :

$$\begin{aligned} \frac{-57}{18} &= \frac{3 \times (-19)}{3 \times 6} \\ &= \frac{-19}{6} \end{aligned}$$

2 Multiplication de quotients

Propriété :

> Pour calculer le produit de deux nombres relatifs en écriture fractionaire, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux en respectant la règle des signes.

c'est à dire, :

$$\boxed{\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d} \qquad (b \neq 0,\ d \neq 0)}$$

Preuve :

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times b \times d &= \frac{a}{b} \times b \times \frac{c}{d} \times d \\ &= a \times c \end{aligned}$$

donc $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$ est un nombre qui, multiplié par $b \times d$ donne $a \times c$, c'est donc le quotient de $a \times c$ par $b \times d$.

Exemples :

- $$\begin{aligned} \frac{7}{6} \times \frac{-15}{28} &= \frac{7 \times (-15)}{6 \times 28} \\ &= \frac{-105}{168} \\ &= \frac{3 \times (-35)}{3 \times 56} \\ &= \frac{(-35)}{56} \\ &= \frac{7 \times (-5)}{7 \times 8} \\ &= \frac{-5}{8} \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} \frac{7}{6} \times \frac{-15}{28} &= \frac{7 \times (-15)}{6 \times 28} \\ &= \frac{7 \times 3 \times (-5)}{3 \times 2 \times 7 \times 4} \\ &= \frac{(-5)}{2 \times 4} \\ &= \frac{-5}{8} \end{aligned}$$

3 Addition et soustraction de quotients

3.1 Cas où les dénominateurs sont les mêmes

Propriété :

Pour additionner (ou soustraire) deux nombres en écritures fractionnaire de même dénominateur :
- on additionne (ou on soustrait) les numérateurs ;
- on garde le dénominateur commun.

c'est à dire :

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b} \qquad (b\neq 0) \qquad\qquad \frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b} \qquad (b\neq 0)$$

Preuve :

$$\begin{aligned}(\frac{a}{b}+\frac{c}{b})\times b &= \frac{a}{b}\times b+\frac{c}{b}\times b \qquad \text{distributivité}\\ &= a+c \qquad \text{définition des quotients}\end{aligned}$$

donc $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}$ est un nombre qui, multiplié par b donne $a+c$. Or $\frac{a+b}{c}$ est le nombre qui, multiplié par b donne $a+c$. D'où $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$.

Exemples :

- $A=\dfrac{-5,4}{7}+\dfrac{12}{7}$

  $A=\dfrac{-5,4+12}{7}$

  $A=\dfrac{6,6}{7}$

- $B=\dfrac{-1,4}{3}-\dfrac{-5,6}{3}$

  $B=\dfrac{-1,4-(-5,6)}{3}$

  $B=\dfrac{-1,4+(+5,6)}{3}$

  $B=\dfrac{4,2}{3}$

3.2 Cas où les dénominateurs sont différents

Propriété :

Pour additionner (ou soustraire) deux nombres en écritures fractionnaire de dénominateurs différents, on écrit d'abord les deux nombres avec le même dénominateur.

Exemples :

- $A = \dfrac{-8}{3} + \dfrac{5}{12}$

$$= \frac{(-8) \times 4}{3 \times 4} + \frac{5}{12}$$
$$= \frac{-32}{12} + \frac{5}{12}$$
$$= \frac{-27}{12}$$
$$= \frac{3 \times (-9)}{3 \times 4}$$
$$= \frac{-9}{4}$$

- $B = \dfrac{-7}{12} - \dfrac{-8}{15}$

On cherche
un dénominateur commun
le plus petit possible :
12 ; 24 ; 36 ; 48 ; 60
15 ; 30 ; 45 ; 60

$$B = \frac{(-7) \times 5}{12 \times 5} - \frac{(-8) \times 4}{15 \times 4}$$
$$B = \frac{-35}{60} - \frac{-32}{60}$$
$$B = \frac{-35 - (-32)}{60}$$
$$B = \frac{-35 + (+32)}{60}$$
$$B = \frac{-3}{60}$$
$$B = \frac{(-1) \times 3}{20 \times 3}$$
$$B = \frac{-1}{20}$$

4 Division de quotients

4.1 Inverse d'un nombre en écriture fractionnaire

Définition :

Deux nombres sont inverses si leur produit est égal à 1.

Propriété et notation :

Un nombre x non nul admet un unique inverse qui s'écrit $\frac{1}{x}$ en écriture fractionnaire. On le note aussi x^{-1} (lire "x exposant -1" ou "x puissance -1").

Preuve :

On a,

$$\begin{aligned} x \times \frac{1}{x} &= \frac{x}{1} \times \frac{1}{x} \\ &= \frac{x \times 1}{x \times 1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

donc x et $\frac{1}{x}$ sont inverses. L'unicité de l'inverse est admise.

Exemples :

- 5 et $\frac{1}{5}$ c'est à dire 5 et $0,2$
- -5 et $\frac{-1}{5}$

Propriété :

L'inverse du nombre $\frac{a}{b}$ (a et b non nuls) est le nombre $\frac{b}{a}$.

Preuve :

$$\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{a \times b}{b \times a} = \frac{1}{1} = 1$$

Exemple :

$\frac{-7}{3}$ et $\frac{-3}{7}$

4.2 Division de deux nombres

Propriétés :

- Diviser par un nombre non nul, c'est multiplier par son inverse.
  C'est à dire,
  $$a \div b = \frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b} \qquad (b \neq 0)$$
- En particulier,
  $$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} \qquad \text{(b, c, d non nuls)}$$

Exemples :

- $A = \frac{6}{5} \div \frac{3}{2}$
  $A = \frac{6}{5} \times \frac{2}{3}$
  $A = \frac{6 \times 2}{5 \times 3}$
  $A = \frac{3 \times 2 \times 2}{5 \times 3}$
  $A = \frac{4}{5}$
- $B = \frac{\frac{6}{5}}{3}$
  $B = \frac{6}{5} \div 3$
  $B = \frac{6}{5} \times \frac{1}{3}$
  $B = \frac{6 \times 1}{5 \times 3}$
  $B = \frac{2 \times 3}{5 \times 3}$
  $B = \frac{2}{5}$
- $C = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{7}{4}}$
  $C = \frac{3}{4} \div \frac{4}{7}$
  $C = \frac{3}{4} \times \frac{4}{7}$