Droites remarquables dans les triangles

F.Gaudon

16 février 2005

Table des matières

1 Différentes droites

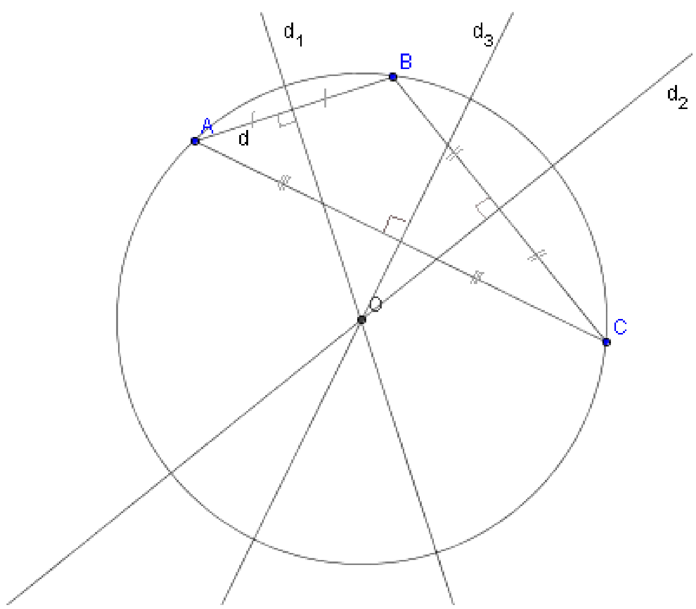
1.1 Médiatrices

Définition :

La médiatrice d'un segment est la droite perpendiculaire à ce segment et passant par son milieu.

Propriétés :

- Les médiatrices des côtés d'un triangle se coupent en un même point. On dit qu'elles sont concourantes.
- Ce point est le centre du cercle passant par les sommets du triangle et appelé cercle circonscrit au triangle.



Preuve :

Soit ABC un triangle non aplati et soient (d_1), (d_2) et (d_3) les médiatrices respectives des côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$.
Puisque le triangle n'est pas aplati, les droites (d_1) et (d_2) se coupent en un point O. Il s'agit de montrer que le point O est aussi sur (d_3).
On sait que O est sur la médiatrice (d_1) de $[AB]$. D'après la propriété : "si un point appartient à la médiatrice d'un segment alors il est à égale distance des extrémités du segment" on en déduit que $OA = OB$.
De même, O est sur la médiatrice (d_2) de $[BC]$ donc $OB = OC$.
$OA = OB$ et $OB = OC$ donc $OA = OC$. D'après la propriété : "si un point est situé à égale distance des extrémités d'un segment alors il appartient à la médiatrice de ce segment", on en déduit que O appartient à la médiatrice (d_3) du segment $[AC]$, ce qu'il fallait démontrer. $\odot$

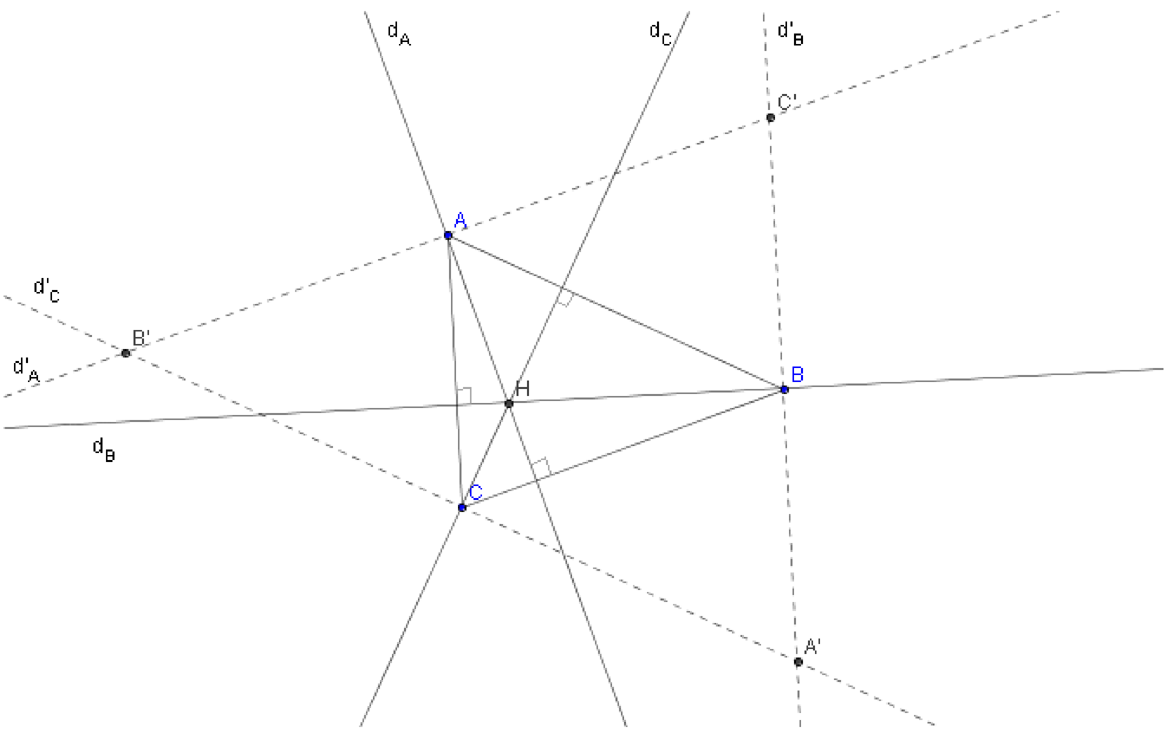
1.2 Hauteurs

Définition :

Dans un triangle, les hauteurs sont les droites passant par un sommet et perpendiculaires au côté opposé.

Propriété :

Les hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point appelé orthocentre du triangle.



Preuve :

Soit ABC un triangle non aplati. Soit (d_A) la hauteur issue de A, (d_B) la hauteur issue de B et (d_C) la hauteur issue de C. Soient (d'_C) la droite parallèle à la droite (AB) et passant par le point C, (d'_A) la droite parallèle

à la droite (BC) passant par le point A et (d'_B) la droite parallèle à (AC) passant par le point B.
(d'_A) et (d'_B) se coupent en un point C', (d'_B) et (d'_C) se coupent en au point A' et (d'_A) et (D'_C) se coupent en un point B'.
On va d'abord montrer que (d_B) est la médiatrice du segment $[A'C']$:
On sait que $(A'C)$ et (AB) sont parallèles et que $(A'B)$ et (AC) sont parallèles. D'après la propriété : "si un quadrilatère a ses côtés parallèles deux à deux alors c'est un parallélogramme", on en déduit que $ABA'C$ est un parallélogramme. On sait donc que $ABA'C$ est un parallélogramme d'où d'après la propriété : "si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses côtés opposés sont égaux et parallèles" on en déduit que $A'B = AC$ et que (AC) et $(A'B)$ sont parallèles.
On montre de même en utilisant le parallélogramme $ACBC'$ que $BC' = AC$.
$A'B = AC$ et $BC' = AC$ donc $A'B = BC'$ d'où B est le milieu de $[A'C']$.
On sait que la hauteur (d_B) est perpendiculaire au côté (AC) et que (AC) et $(A'B)$ sont parallèles donc d'après la propriété : "si deux droites sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre", les droites (d_B) et $(A'C')$ sont perpendiculaires.
Finalement, (d_B) coupe $[A'C']$ perpendiculairement en son milieu B donc c'est la médiatrice de $[A'C']$.
De même, on montre que (d_A) est la médiatrice de $[B'C']$ et que (d_C) est la médiatrice de $[A'B']$.Les médiatrices d'un triangle sont concourantes donc les droites (d_A), (d_B) et (d_C) sont concourantes. $\odot$

1.3 Médianes

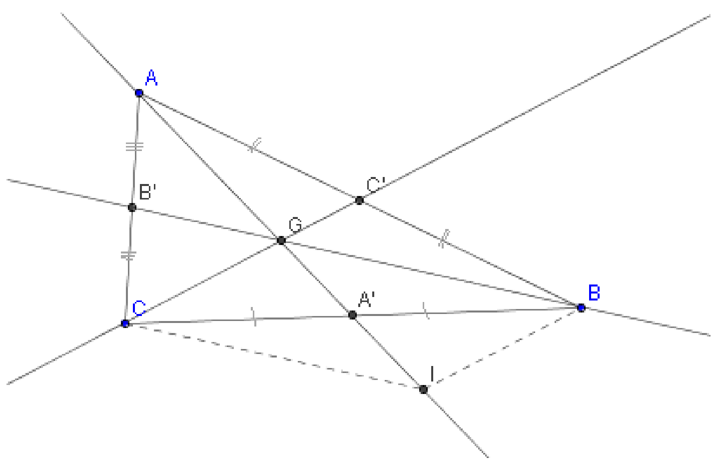
Définition :

Dans un triangle, les médianes sont les droites passant par un sommet et passant par le milieu du côté opposé.

Propriétés :

- Les médianes d'un triangle sont concourantes en un point appelé centre de gravité du triangle.
- Si dans un triangle, un point est l'intersection de deux médianes, alors il est situé aux deux tiers de chaque médiane à partir des sommets. C'est à dire,

$$AG = \frac{2}{3}AA' \; ; \; BG = \frac{2}{3}BB' \; ; \; CG = \frac{2}{3}CC'$$



Preuve :

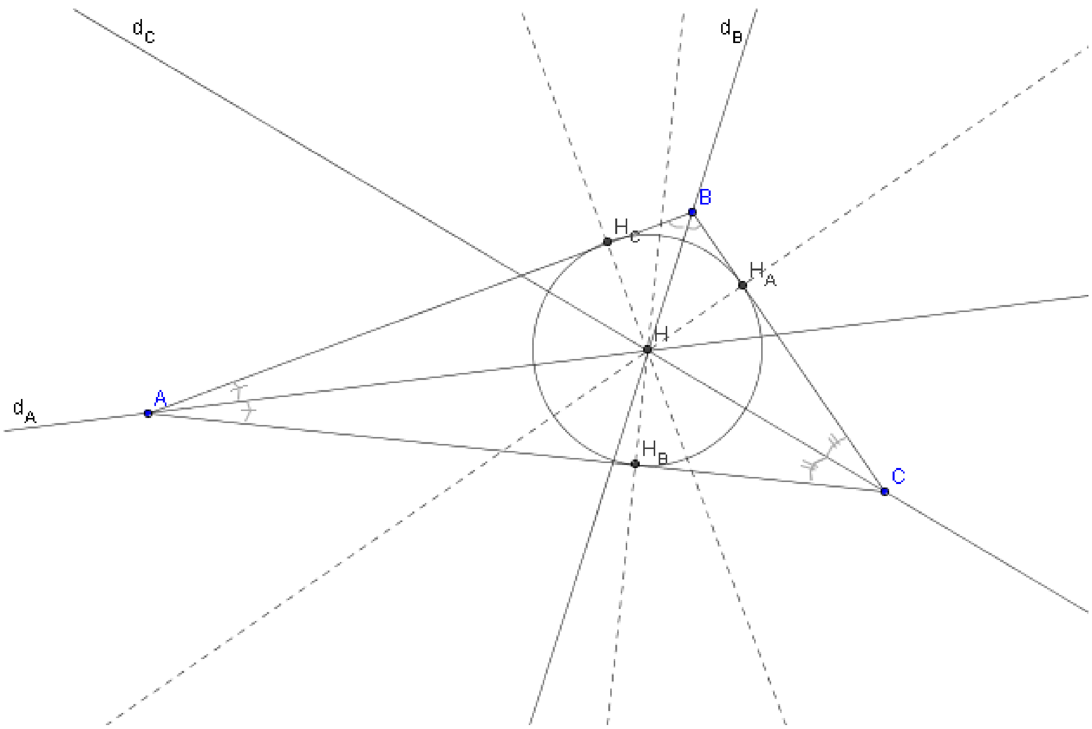
Soit ABC un triangle non aplati. On appelle A', B' et C' les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$. Soit G le point d'intersection de (CC') et (BB'). Soit I le point tel que G est le milieu de $[AI]$. Soit A'' le point

d'intersection de (AG) et de $[BC]$. Il s'agit donc de montrer que A'' est le milieu de $[BC]$ c'est à dire que A' et A'' sont confondus. On sait que dans le triangle ABI, C' est le milieu de $[AB]$ et que G est le milieu de $[AI]$.
D'après la propriété "si dans un triangle, une droite passe par le milieu de deux côtés, alors elle est parallèle au troisième" on en déduit que $(C'G)$ est parallèle à (BI) et d'après la propriété "si dans un triangle, un segment joint les milieux de deux côtés, alors sa longueur vaut la moitié de celle du troisième côté" on en déduit que $BI = 2C'G$.
De même on montre dans le triangle CAI que les droites (BB') et (CI) sont parallèles. On sait donc que (BG) est parallèle à (CI) et que (GC) est parallèle à (BI) donc d'après la propriété "si un quadrilatère a ses côtés opposés parallèles, alors c'est un parallélogramme" on en déduit que $BGCI$ est un parallélogramme. $BGCI$ étant un parallélogramme, d'après la propriété "si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses diagonales se coupent en leur milieu" donc le milieu A' de $[BC]$ est aussi le milieu de la diagonale $[IG]$ et par conséquent A' et le point d'intersection A'' de (AG) avec (BC) sont confondus.
Pour montrer que $CG = \frac{2}{3}CC'$, on sait que $BGCI$ est un parallélogramme donc d'après la propriété "si un quadrilatère est un parallélogramme, alors se côtés opposés ont même longueur" on déduit que $GC = BI$. Puis, de $GC = BI$ et de $BI = 2C'G$ on déduit que $GC = 2C'G$ donc $CG = 2C'C + 2CG$ d'où $CG = \frac{2}{3}CC'$.

1.4 Bissectrices

Définition :

La bissectrice d'un angle est la droite qui partage l'angle en deux angles égaux.



Propriétés :

- Les bissectrices d'un triangle sont concourantes.
- Ce point d'intersection H est le centre d'un cercle appelé cercle inscrit dans le triangle qui passe par les points d'intersection des droites perpendiculaires aux côtés et passant par H.

Preuve :

Soit ABC un triangle et (d_A), (d_B) et (d_C) les bissectrices des angles $\widehat{BAC}$, $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ respectivement.
Soit H le point d'intersection de (d_A) et de (d_B). D'après la propriété "Si un point appartient à la bissectrice d'un angle alors il est à égale distance des côtés" on en déduit que H est à égale distance de (AB) et de (AC) d'une part et à égale distance de (AB) et (BC). On en conclut donc que H est à égale distance de (AC) et (BC). D'après la propriété "si un point est à égale distance des côtés d'un angle alors il se trouve sur la bissectrice de cet angle, on en conclut que H se trouve sur la bissectrice de $\widehat{ACB}$ c'est à dire sur (d_C). Les trois bissectrices sont donc concourantes en H.
En outre, si l'on appelle H_A le point d'intersection de la perpendiculaire à (BC) passant par H, H_B le point d'intersection de la perpendiculaire à (AC) passant par H et H_C le point d'intersection de la perpendiculaire à (AC) passant par H, les distances de H à (BC), à (AC) et à (AB) son respetivement données par HH_A, HH_B et HH_C et on a montré qu'elles sont égales donc le cercle de centre H et de rayon HH_A passe par les trois points H_A, H_B et H_B.

2 Applications

Propriétés :

- Si une droite passe par un sommet et le centre de gravité d'un triangle, alors c'est une médiane, elle coupe le côté opposé en son milieu.
- Si une droite passe par un sommet et l'orthocentre d'un triangle, alors c'est une hauteur, elle est perpendiculaire au côté opposé.

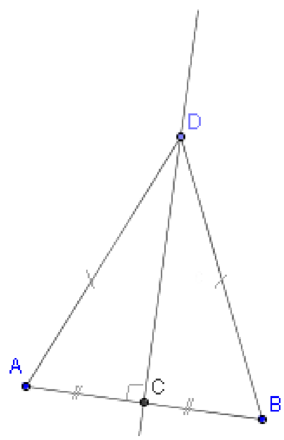
Preuve :

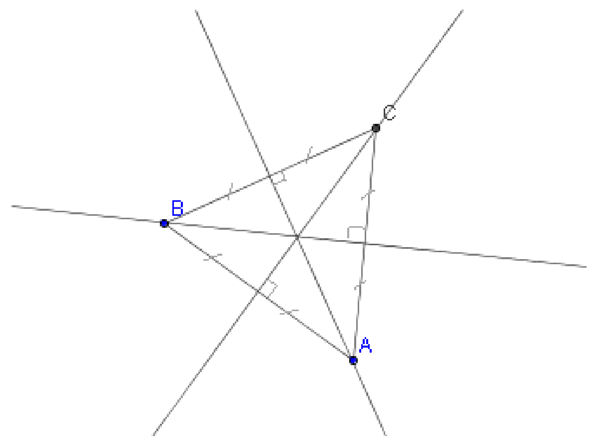
- Soit ABC un triangle et G son centre de gravité. On considère la droite passant par A et G. Les médianes du triangle sont concourantes en G. La médiane issue de A est la droite passant par A et par le milieu du côté opposé. Elle coupe les deux autres médianes en G donc elle passe par A et G. Par unicité de la droite passant par dexu points données, la droite passant par A et G est donc la médiane issue de A et elle coupe le côté opposé en son milieu.
- De même que précédemment, cette droite est une hauteur et elle est donc perpendiculaire au côté opposé.

3 Cas des triangles particuliers

Propriétés :

- Si un triangle est isocèle, alors la hauteur, la médiane, la bissectrice issues du sommet principal ainsi que la médiatrice de la base sont confondues.
- Si un triangle est équilatéral, alors les hauteurs, les médianes, les médiatrices et les bissectrices sont confondues.





Preuve :

- Soit ABC un triangle isocèle de sommet principal A. Comme AB et AC sont égales, la médiatrice de la base passe par A. Soit I le milieu de $[BC]$. La droite (AI) est donc la médiatrice de la base. Elle passe par A et elle est perpendiculaire à (BC), donc c'est la hauteur issue de A. Elle passe par le milieu I de $[BC]$ et par le sommet principal A donc c'est la médiane issue de A. Enfin, (AI) est la médiatrice de $[BC]$ donc B a pour symétrique C par rapport à (AI) et A est son propre symétrique. Par conséquent, l'angle $\widehat{BAI}$ et l'angles $\widehat{CAI}$ sont symétriques par rapport à (AI). La symétrie axiale conserve les angles donc ces deux angles sont égaux et (AI) est aussi la bissectrice de $\widehat{BAC}$.
- Soit ABC un triangle équilatéral, il est donc isocèle en A et d'après la propriété précédente, la hauteur, la médiane, la bissectrice issues de A ainsi que la médiatrice de $[BC]$ sont confondues. De même, le triangle

ABC est isocèle en B donc la hauteur, la bissectrice, la médiane issues de B ainsi que la médiatrice de $[AC]$ sont confondues. Enfin, le triangle est aussi isocèle en C donc la hauteur, la médiane, la bissectrice issues de C ainsi que la médiatrice de $[AB]$ sont confondues.