Calcul littéral 4e cours

F.Gaudon

2 janvier 2005

Table des matières

Une même expression littérale peut avoir des écritures différentes dont l'une peut se révéler plus pratique que d'autres pour résoudre un problème donné. Les règles suivantes permettent de relier différentes écritures des expressions littérales.

1 Distributivité et réduction

1.1 Distributivité

Propriété :

Pour tous les nombres a, b et k ;

$$ka + kb = k(a + b) \text{ et } ka - kb = k(a - b)$$

Définition :

- Passer du produit $k(a+b)$ (ou $k(a-b)$) à la somme $ka+kb$ (ou $ka-kb$) s'appelle *développer*.
- Passer de la somme $ka+kb$ (ou $ka-kb$) au produit $k(a+b)$ (ou $k(a-b)$) s'appelle *factoriser*.

Exemple :

$A = 3(x + 6)$
$A = 3 \times x + 3 \times 6$
$A = 3x + 18$

1.2 Réduction

Exemples :

- $A = 3 \times 4 - 3x + 5 + x$
  $A = 3 \times 4 - 3 \times x + 5 + x$
  $A = 12 + 5 - 3x + x$
  $A = 17 - 3x + x$
  $A = 17 - 2x$
- $B = 3x^2 - 2x + 10 - 6x - 3,5$
  $B = 3x^2 - 2x - 6x + 10 - 3,5$
  $B = 3x^2 - 8x + 6,5$

2 Suppression de parenthèses

Propriété :

- Si dans une somme, les parenthèses sont précédées d'un signe +, on peut supprimer les parenthèses. C'est à dire, pour tous les nombres a, b, c et d,
$$a + (b + c) = a + b + c$$
- Si dans une somme, les parenthèses sont précédées d'un signe -, on peut supprimer les parenthèses à condition de changer tous les signes à l'intérieur. C'est à dire, pour tous les nombres a, b, c et d,
$$a - (b + c) = a + opp(b + c) = a + opp(b) + opp(c)$$

Preuve :

Seule la deuxième propriété est à démontrer :

$(b + c) + opp(b) + opp(c) = b + c + opp(b) + opp(c)$
$(b + c) + opp(b) + opp(c) = b + opp(b) + c + opp(c)$
$(b + c) + opp(b) + opp(c) = 0 + 0$

puisque $b + opp(b) = 0$(nombres opposés) d'une part et $c + opp(c) = 0$ d'autre part.
On en déduit que $(b + c)$ a pour opposé $opp(b) + opp(c)$ donc que

$$a - (b + c) = a + opp(b + c)$$
$$a - (b + c) = a + opp(b) + opp(c)$$

Exemples :

- $A = 3 + (4 - x)$
  $A = 3 + 4 - x$
  $A = 7 - x$
- $B = 3 - (4 - x)$
  $B = 3 - 4 + x$
  $B = -1 + x$
- $C = 3 - (-4 - x)$
  $C = 3 + 4 + x$
  $C = 7 + x$

3 Double distributivité

Propriété :

Pour tous les nombres a, b, c et d, on a :

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

Preuve :

$$\begin{aligned}(a+b)(c+d) &= (a+b)\times(c+d) \\ &= (a+b)\times c + (a+b)\times d \text{ (distributivité avec } k=(a+b)) \\ &= a\times c + b\times c + a\times d + b\times d \\ &= ac + bc + ad + bd\end{aligned}$$

Exemple :

$$A = (2x+3)(-x-5)$$
$$A = 2x\times(-x) + 2x\times(-5) + 3\times(-x) + 3\times(-5)$$
$$A = (-2\times x\times x) + (-10x) + (-3x) + (-15)$$
$$A = -2x^2 - 10x - 3x - 15$$
$$A = -2x^2 - 13x - 15$$