Cours de Mathématiques classe de 4e

F.Gaudon

15 août 2005

Table des matières

Chapitre 1

Opérations sur les nombres relatifs

1.1 Multiplication des nombres relatifs

1.1.1 Règle des signes

Propriété :

- Le produit de deux nombres relatifs de même signe est un nombre positif.
- Le produit de deux nombres relatifs de signes contraires est un nombre négatif.

c'est à dire de manière plus mnémotechnique :

(-)×(-)=(+)
(+)×(+)=(+)
(+)×(-)=(-)
(-)×(+)=(-)

Preuve : Soient a et b deux nombres relatifs, on notera $opp(a)$ l'opposé du nombre a.

- Par définition, l'opposé d'un nombre a est le nombre noté $opp(a)$ qui vérifie $a + opp(a) = 0$.

$$\text{On a } \begin{aligned}(a + opp(a)) \times b &= a \times b + opp(a) \times b \\ &= 0 \times b \\ &= 0\end{aligned}$$

donc $a \times b$ et $opp(a) \times b$ sont opposés c'est à dire $opp(a \times b) = opp(a) \times b$.

- D'après ce qui précède,

$$\begin{aligned}opp(a) \times opp(b) &= opp(a \times opp(b)) \\ &= opp(opp(b) \times a)) \\ &= opp(opp(b \times a)) \\ &= a \times b\end{aligned}$$

Exemples :

$$A = (-2) \times (-2,5)$$
$$A = (+5)$$
$$A = 5$$

$$B = 2 \times 2,5$$
$$B = (+2) \times (+2,5)$$
$$B = (+5)$$
$$B = 5$$

$$C = (-2) \times 2,5$$
$$C = -5$$

1.1.2 Produit de plusieurs nombres relatifs

Propriété :

- Un produit est positif lorsque le nombre de facteurs négatifs est pair.
- Un produit est négatif lorsque le nombre de facteurs négatifs est impair.

Preuve :
On utilise la règle des signes plusieurs fois.

Exemples :

$$A = (-4) \times (-7,5) \times (-5)$$
$$A = -150$$

$$B = (-4) \times (-7,5) \times (-5) \times 4$$
$$B = -600$$

$$C = (-4) \times (-7,5) \times (-5) \times 4 \times 2$$
$$C = -1200$$

1.2 Division de deux nombres relatifs

1.2.1 Définition d'un quotient

Définition :

Le *quotient* d'un nombre relatif a par un nombre relatif b ($b \neq 0$) est le nombre par lequel il faut multiplier b pour obtenir a.
C'est le résultat de la division de a par b.
On le note $\frac{a}{b}$. On a donc $b \times \frac{a}{b} = a$.

Exemples :
$4 \times (-2,5) = -10$ donc $\frac{-10}{4} = -2,5$ et de même $\frac{-35}{-7} = 5$

1.2.2 Règle des signes pour les quotients

Propriété :

- Le quotient de deux nombres de même signe est un nombre négatif ;
- Le quotient de deux nombres de signes contraires est un nombre négatif.

Preuve :
Soient a et b deux nombres relatifs non nuls,
$\frac{a}{b}$ est le nombre qui multiplié par b donne a c'est à dire $b \times \frac{a}{b} = a$

- si a et b sont positifs, $\frac{a}{b}$ est positif d'après l'égalité précédente ;
- si a est négatif et b est positif, $\frac{a}{b}$ est négatif ;
- si a et b sont négatifs, $\frac{a}{b}$ est positif ;
- sir b est négatif et a est positif, $\frac{a}{b}$ est négatif.

Exemples :

$$\frac{-5}{4} = -1,25$$
$$\frac{-13,5}{-2,4} = 5,625$$

Remarque :

Si a et b sont deux nombres relatifs avec $b \neq 0$:

$$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$$

Exemples :

$$A = \frac{-3}{2}$$
$$A = \frac{3}{-2}$$
$$A = -\frac{3}{2}$$
$$A = -1,5$$

$$B = -\frac{-3}{2}$$
$$B = \frac{-(-3)}{2}$$
$$B = \frac{+3}{2}$$
$$B = \frac{3}{2}$$
$$B = 1,5$$

Chapitre 2

Calcul littéral

Une même expression littérale peut avoir des écritures différentes dont l'une peut se révéler plus pratique que d'autres pour résoudre un problème donné. Les règles suivantes permettent de relier différentes écritures des expressions littérales.

2.1 Distributivité et réduction

2.1.1 Distributivité

Propriété de distributivité :

Pour tous les nombres a, b et k ;

$$ka + kb = k(a + b)$$

Définition :

- Passer du produit $k(a + b)$ (ou $k(a - b)$) à la somme $ka + kb$ (ou $ka - kb$) s'appelle *développer*.
- Passer de la somme $ka + kb$ (ou $ka - kb$) au produit $k(a + b)$ (ou $k(a - b)$) s'appelle *factoriser*.

Exemple :

$$A = 3(x + 6)$$
$$A = 3 \times x + 3 \times 6$$
$$A = 3x + 18$$

2.1.2 Réduction

Exemples :

$A = 3(4 - x) + 5$
$A = 3 \times 4 - 3 \times x + 5$
$A = 12 + 5 - 3x$
$A = 17 - 3x$

$B = 3x^2 - 2x + 10 - 6x - 3,5$
$B = 3x^2 - 2x - 6x + 10 - 3,5$
$B = 3x^2 - 8x + 6,5$

2.2 Suppression de parenthèses

Propriété :

- Si dans une somme les parenthèses sont précédées d'un signe +, on peut supprimer les parenthèses. C'est à dire, pour tous les nombres a, b, c et d,

$$a + (b + c) = a + b + c$$

- Si dans une somme, les parenthèses sont précédées d'un signe -, on peut supprimer les parenthèses à condition de changer tous les signes à l'intérieur. C'est à dire, pour tous les nombres a, b, c et d,

$$a - (b + c) = a + opp(b + c) = a + opp(b) + opp(c)$$

Preuve :
Seule la deuxième propriété est à démontrer :

$(b + c) + opp(b) + opp(c) = b + c + opp(b) + opp(c)$
$(b + c) + opp(b) + opp(c) = b + opp(b) + c + opp(c)$
$(b + c) + opp(b) + opp(c) = 0 + 0$

puisque $b + opp(b) = 0$(nombres opposés) d'une part et $c + opp(c) = 0$ d'autre part.
On en déduit que $(b + c)$ a pour opposé $opp(b) + opp(c)$ donc que

$$a - (b + c) = a + opp(b + c)$$
$$a - (b + c) = a + opp(b) + opp(c)$$

Exemples :

$$A = 3 + (4 - x)$$
$$A = 3 + 4 - x$$
$$A = 7 - x$$

$$B = 3 - (4 - x)$$
$$B = 3 - 4 + x$$
$$B = -1 + x$$

$$C = 3 - (-4 - x)$$
$$C = 3 + 4 + x$$
$$C = 7 + x$$

2.3 Double distributivité

Propriété :

Pour tous les nombres a, b, c et d, on a :

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Preuve :

$$\begin{aligned}(a+b)(c+d) &= (a+b)\times(c+d)\\ &= (a+b)\times c+(a+b)\times d\\ &\text{(distributivité en prenant } k=(a+b))\\ &= a\times c+b\times c+a\times d+b\times d\\ &= ac+bc+ad+bd\end{aligned}$$

Exemple :

$$A=(2x+3)(-x-5)$$
$$A=2x\times(-x)+2x\times(-5)+3\times(-x)+3\times(-5)$$
$$A=(-2\times x\times x)+(-10x)+(-3x)+(-15)$$
$$A=-2x^2-10x-3x-15$$
$$A=-2x^2-13x-15$$

Chapitre 3

Opérations sur les quotients

3.1 Egalité de quotients

Propriété :

On ne change pas un quotient en multipliant ou en divisant son numérateur et son dénominateur par un même nombre non nul.
C'est à dire, pour tous les nombres a, b et k non nuls,

$$\frac{a}{b} = \frac{k \times a}{k \times b}$$

et

$$\frac{a}{b} = \frac{a \div k}{b \div k}$$

Preuve :
Par définition,

$$\frac{k \times a}{k \times b} \times k \times b = k \times a$$

donc

$$\frac{k \times a}{k \times b} \times b = a$$

donc $\frac{k \times a}{k \times b}$ est un nombre qui, multiplié par b donne a. Or, $\frac{a}{b}$ est le nombre qui, multiplié par b donne a. D'où $\frac{k \times a}{k \times b} = \frac{a}{b}$.

Exemple :

$$\begin{aligned} \frac{-57}{18} &= \frac{3 \times (-19)}{3 \times 6} \\ &= \frac{-19}{6} \end{aligned}$$

3.2 Multiplication de quotients

Propriété :

Pour calculer le *produit* de deux nombres relatifs en écriture fractionnaire, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux en respectant la règle des signes.
C'est à dire,

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d} \qquad (b \neq 0\; d \neq 0)$$

Preuve :

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times b \times d &= \frac{a}{b} \times b \times \frac{c}{d} \times d \\ &= a \times c \end{aligned}$$

donc $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$ est un nombre qui, multiplié par $b \times d$ donne $a \times c$, c'est donc le quotient de $a \times c$ par $b \times d$.

Exemples :

$$A = \frac{7}{6} \times \frac{-15}{28}$$
$$A = \frac{7 \times (-15)}{6 \times 28}$$
$$A = \frac{-105}{168}$$
$$A = \frac{3 \times (-35)}{3 \times 56}$$
$$A = \frac{(-35)}{56}$$
$$A = \frac{7 \times (-5)}{7 \times 8}$$
$$A = \frac{-5}{8}$$

$$B = \frac{7}{6} \times \frac{-15}{28}$$
$$B = \frac{7 \times (-15)}{6 \times 28}$$
$$B = \frac{7 \times 3 \times (-5)}{3 \times 2 \times 7 \times 4}$$
$$B = \frac{(-5)}{2 \times 4}$$
$$B = \frac{-5}{8}$$

3.3 Addition et soustraction de quotients

3.3.1 Cas où les dénominateurs sont les mêmes

Propriété :

Pour *additionner* (ou soustraire) deux nombres en écritures fractionnaire de même dénominateur :

- on additionne (ou on soustrait) les numérateurs ;
- on garde le dénominateur commmun.

c'est à dire,

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \qquad (b \neq 0)$$
$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b} \qquad (b \neq 0)$$

Preuve :

$$\begin{aligned}(\frac{a}{b} + \frac{c}{b}) \times b &= \frac{a}{b} \times b + \frac{c}{b} \times b && \text{distributivité} \\ &= a + c && \text{définition des quotients}\end{aligned}$$

donc $\frac{a}{b} + \frac{c}{b}$ est un nombre qui, multiplié par b donne $a + c$. Or $\frac{a+b}{c}$ est le nombre qui, multiplié par b donne $a + c$. D'où $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$.

Exemples :

$$A = \frac{-5,4}{7} + \frac{12}{7}$$
$$A = \frac{-5,4+12}{7}$$
$$A = \frac{6,6}{7}$$
$$B = \frac{-1,4}{3} - \frac{-5,6}{3}$$
$$B = \frac{-1,4-(-5,6)}{3}$$
$$B = \frac{-1,4+(+5,6)}{3}$$
$$B = \frac{4,2}{3}$$

3.3.2 Cas où les dénominateurs sont différents

Propriété :

Pour additionner (ou soustraire) deux nombres en écritures fractionnaire de dénominateurs différents, on écrit d'abord les deux nombres avec le même dénominateur.

Exemples :

$$A = \frac{-8}{3} + \frac{5}{12}$$
$$A = \frac{(-8) \times 4}{3 \times 4} + \frac{5}{12}$$
$$A = \frac{-32}{12} + \frac{5}{12}$$
$$A = \frac{-27}{12}$$
$$A = \frac{3 \times (-9)}{3 \times 4}$$
$$A = \frac{-9}{4}$$
$$B = \frac{-7}{12} - \frac{-8}{15}$$

On cherche
un dénominateur commun
le plus petit possible :
12 ; 24 ; 36 ; 48 ; 60
15 ; 30 ; 45 ; 60

$$B = \frac{(-7) \times 5}{12 \times 5} - \frac{(-8) \times 4}{15 \times 4}$$
$$B = \frac{-35}{60} - \frac{-32}{60}$$
$$B = \frac{-35 - (-32)}{60}$$
$$B = \frac{-35 + (+32)}{60}$$
$$B = \frac{-3}{60}$$
$$B = \frac{(-1) \times 3}{20 \times 3}$$
$$B = \frac{-1}{20}$$

3.4 Division de quotients

3.4.1 Inverse d'un nombre en écriture fractionnaire

Définition :

Deux nombres sont *inverses* si leur produit est égal à 1.

Propriété et notation :

Un nombre x non nul admet un unique inverse qui s'écrit $\frac{1}{x}$ en écriture fractionnaire.
On le note aussi x^{-1} (lire "x exposant -1" ou "x puissance -1").

Preuve :
On a,

$$\begin{aligned} x \times \frac{1}{x} &= \frac{x}{1} \times \frac{1}{x} \\ &= \frac{x \times 1}{x \times 1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

donc x et $\frac{1}{x}$ sont inverses. L'unicité de l'inverse est admise.

Exemples :
- 5 et $\frac{1}{5}$ c'est à dire 5 et $0,2$
- -5 et $\frac{-1}{5}$

Propriété :

L'inverse du nombre $\frac{a}{b}$ (a et b non nuls) est le nombre $\frac{b}{a}$.

Preuve :

$$\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{a \times b}{b \times a} = \frac{1}{1} = 1$$

Exemple :
$\frac{-7}{3}$ et $\frac{-3}{7}$ sont inverses.

3.4.2 Division de deux nombres

Propriétés :

- *Diviser* par un nombre non nul, c'est multiplier par son inverse.
  C'est à dire,
  $$a \div b = \frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b} \qquad (b \neq 0)$$
- En particulier,
  $$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} \qquad \text{(b, c, d non nuls)}$$

Exemples :

$$A = \frac{6}{5} \div \frac{3}{2}$$
$$A = \frac{6}{5} \times \frac{2}{3}$$
$$A = \frac{6 \times 2}{5 \times 3}$$
$$A = \frac{3 \times 2 \times 2}{5 \times 3}$$
$$A = \frac{4}{5}$$

$$B = \frac{\frac{6}{5}}{3}$$
$$B = \frac{6}{5} \div 3$$
$$B = \frac{6}{5} \times \frac{1}{3}$$
$$B = \frac{6 \times 1}{5 \times 3}$$
$$B = \frac{2 \times 3}{5 \times 3}$$
$$B = \frac{2}{5}$$

$$C = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{7}{4}}$$
$$C = \frac{3}{4} \div \frac{4}{7}$$
$$C = \frac{3}{4} \times \frac{4}{7}$$

Chapitre 4

Puissances

4.1 Puissance d'un nombre a

4.1.1 Puissance d'exposant un entier positif

Définition :

Si n est un entier supérieur ou égal à 2 alors :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}$$

De plus $a^1 = a$ et $a^0 = 1$.

Exemples :

$$\begin{aligned}
2^3 &= 2 \times 2 \times 2 \\
&= 8 \\
&\text{mais} \\
3^2 &= 3 \times 3 \\
&= 9 \\
\\
3^1 &= 3 \\
&\text{et} \\
3^0 &= 1 \\
\\
(-2)^4 &= 16 \\
&\text{et} \\
(-2)^3 &= -8
\end{aligned}$$

4.1.2 Puissance d'exposant un entier négatif

Définition :

Si a est un nombre non nul alors on note a^{-n} l'inverse de a^n. Donc $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
.
En particulier,

$$\frac{1}{a} = a^{-1}$$

Exemples :

$$\begin{aligned}\frac{1}{8} &= \frac{1}{2^3}\\ &= 2^{-3}\\ &= 0,125\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{-8} &= \frac{1}{-2^3}\\ &= -2^{-3}\\ &= -0,125\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}10^{-4} &= \frac{1}{10^4}\\ &= 0,0001\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-10^{-4} &= -\frac{1}{10^4}\\ &= -0,0001\end{aligned}$$

4.1.3 Opérations sur les puissances

Propriété :

Si a est un nombre non nul et m et n sont des entiers relatifs, alors :

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

En particulier,

$$a^n \times a^{-n} = a^0 = 1$$

Exemples :

$$2^3 \times 2^2 = 32$$

$$\frac{3^2}{3^3} = \frac{9}{27}$$
$$3^{-1} = \frac{1}{3}$$

Propriété :

Si $a \neq 0$, $b \neq 0$ et n est un entier relatif alors :

$$(a \times b)^n = a^n \times b^n$$

Propriété :

En l'absence de parenthèses, les puissances sont effectuées en priorité sur les multiplications et les divisions.

Exemple :

$$A = -6 \times 10^2 + \frac{7}{5^3}$$
$$A = -6 \times 100 + \frac{7}{125}$$
$$A = -600 + \frac{7}{125}$$
$$A = -600 + 0,056$$
$$A = -599,944$$

4.2 Cas particulier des puissances de 10

4.2.1 Calcul d'une puissance de 10

Propriété :

Quel que soit l'entier n positif :

$$10^n = \underbrace{100\ldots0}_{n \text{ zéros}}$$

$$10^{-n} = \underbrace{0,00\ldots01}_{n \text{ zéros}}$$

Exemples :

$$10^5 = 100000$$
$$10^{-5} = 0,00001$$

4.2.2 Formules

$$10^n \times 10^m = 10^{m+n}$$
$$(10^n)^m = 10^{mn}$$
$$\frac{10^m}{10^n} = 10^{m-n}$$

4.2.3 Produit d'un nombre par une puissance de 10

Propriété :

Pour multiplier un nombre par 10^n, on décale la virgule de n rangs vers la droite en rajoutant des zéros si nécessaire.
Pour multiplier un nombre par 10^{-n}, on décale la virgule de n rangs vers la gauche en rajoutant des zéros si nécessaire.

Exemples :

$$25,1 \times 10^5 = 2510000$$
$$25,1 \times 10^{-1} = 0,000251$$

4.2.4 Notation scientifique

Définition :

La *notation scientifique* d'un nombre décimal est de la forme :

$$a \times 10^n$$

avec :
- a nombre décimal avec un seul chiffre non nul avant la virgule ;
- n exposant entier relatif.

Exemples :

$$56000000 = 5,6 \times 10^7$$
$$-98700 = -9,8 \times 10^4$$
$$0,000078 = 7,8 \times 10^{-5}$$
$$-0,00304 = -3,04 \times 10^{-3}$$

Exemple de calcul en notation scientifique :

$$\frac{A}{B} = \frac{1,2 \times 10^4}{4 \times 10^3}$$
$$\frac{A}{B} = \frac{12 \times 10^{-1} \times 10^4}{4 \times 10^3}$$
$$\frac{A}{B} = 3 \times 10^{-1} \times 10^4 \times 10^{-3}$$
$$\frac{A}{B} = 3 \times 10^0$$
$$\frac{A}{B} = 3$$

Chapitre 5

Proportionnalité et Statistiques

5.1 Proportionnalité

Définition :

Deux grandeurs sont *proportionnelles* lorsque l'on peut calculer les valeurs de l'une en multipliant les valeurs correspondantes de l'autre par le même nombre. Ce nombre est appelé *coefficient de proportionnalité*.

Propriété :

Une situation de proportionnalité est représentée graphiquement dans un repère par des points alignés sur une droite passant par l'origine du repère.

Définition :

Le *mouvement* d'un objet est *uniforme* lorsque la distance d qu'il parcourt est proportionnelle au temps t mis pour parcourir cette distance. Le coefficient de proportionnalité v est appelé la vitesse de l'objet.
On a donc :

$$d = v \times t$$

Définition :

Lorsque le mouvement d'un objet n'est pas constant, on peut s'y ramener en parlant de *vitesse moyenne* : la *vitesse moyenne* d'un objet qui parcourt une distance d en un temps t est le quotient de d par t.
C'est à dire,

$$v_{moyenne} = \frac{d}{t}$$

5.2 Statistiques

5.2.1 Séries cumulées et fréquences

Exemple :
Répartition des âges des 25 adhérents d'un club.

âge (années)	12	13	14	15	16
effectif	2	6	9	5	3
effectifs cumulés croissants	2	2+6 = 8	2+6+9 = 17	2+6+9+5 = 22	2+6+9+5+3 = 25
effectifs cumulés décroissants	25	25-2 = 23	25-2-6 = 17	25-2-6-9 = 8	25-2-6-9-5 = 3

âge (années)	12	13	14	15	16
effectif	2	6	9	5	3
fréquence en pourcentage	$\frac{2}{25} \times 100$ = 8	$\frac{6}{25} \times 100$ = 24	$\frac{9}{25} \times 100$ = 36	$\frac{5}{25} \times 100$ = 20	$\frac{3}{25} \times 100$ =12

Définition :

La *fréquence* d'une valeur est le quotient de l'effectif de cette valeur par l'effectif total.
C'est à dire,

$$\text{fréquence} = \frac{\text{effectif de la classe}}{\text{effectif total}}$$

Souvent, on l'exprime en pourcentage.

Exemple :
Fréquence de la valeur 12 :

$$\begin{aligned}\frac{2}{25} &= 0,08 \\ &= \frac{8}{100}\end{aligned}$$

donc 8 en pourcentage.

5.2.2 Moyennes

Moyenne non pondérée

Définition :

La *moyenne* d'une série statistique est le quotient de la somme de toutes les valeurs par l'effectif total.

Exemple :
Un élève a obtenu 8 ; 10 ; 12 et 10,5 comme notes au cours d'un trimestre. Sa moyenne est donnée par

$$\frac{8 + 10 + 12 + 10,5}{4} \approx 10,1$$

Moyenne pondérée

Définition :

La *moyenne pondérée* est le quotient de la somme de toutes les valeurs, affectées chacune de leur coefficient, par la somme des coefficients.

Exemple :
Dans l'exemple du club, la moyenne d'âge est donnée par :

$$\frac{2 \times 12 + 6 \times 13 + 9 \times 14 + 5 \times 15 + 3 \times 18}{2 + 6 + 9 + 5 + 3} \approx 14,3$$

soit environ 14,3 ans.

Remarque :
Une moyenne non pondérée est une moyenne pondérée dont tous les coefficients sont égaux à 1.

Chapitre 6

Equations

6.1 Notions sur les équations

6.1.1 Egalités

Exemple :
– $2 = 1$ est une égalité ;
– $3 = 3$ est aussi une égalité.
L'une est vraie, l'autre est fausse.

6.1.2 Equations

Définition :

Une équation est une égalité dans laquelle apparaît une ou plusieurs variables (x, y, etc.).

Exemple :

$$\underbrace{9x-2}_{\text{1er membre}} = \underbrace{3x+1}_{\text{2nd membre}}$$

est une équation. x est est une *variable* ou *inconnue*.

Définition :

Résoudre une équation, c'est trouver tous les nombres par lesquels remplacer la variable x pour que l'égalité soit vraie.

Exemples :
- D'une part, $9 \times 5 - 2 = 43$
  D'autre part, $3 \times 5 + 1 = 16$
  $43 \neq 16$ donc 5 n'est pas une solution de l'équation $9x - 2 = 3x + 1$.
- D'une part, $9 \times 0,5 - 2 = 2,5$
  D'autre part, $3 \times 0,5 + 1 = 2,5$
  $2,5 = 2,5$ donc $0,5$ est une solution de l'équation $9x - 2 = 3x + 1$.

Objectif :
L'objet de la suite du chapitre a pour but d'étudier les moyens d'obtenir de manière systématique *toutes* les solutions d'une équation donnée.

6.2 Résolution d'équations

6.2.1 Règles de conservation des égalités

Première règle :

L'égalité est conservée (c'est à dire reste vraie ou fausse) si on ajoute (ou on soustrait) le même nombre aux deux membres de l'égalité.

Exemple :
- $4 = 4$ donc $4 - 1 = 4 - 1$;
- $3x + 2 = 4x + 6$ donc $3x + 1 = 4x + 5$.

Deuxième règle :

L'égalité est conservée (c'est à dire reste vraie ou fausse) si on multiplie (ou on divise) par le même nombre non nul les deux membres de l'équation.

Exemples :
- $6 = 5 + 1$ donc $\frac{6}{2} = \frac{5+1}{2}$;
- $3x + 1 = 4x + 6$ donc $\frac{3x+2}{2} = \frac{4x+6}{2}$.

6.2.2 Méthode de résolution d'équations

Méthode :

On transforme l'équation à l'aide des règles permettant de conserver l'égalité pour isoler la variable x dans un des membres de l'équation et obtenir une équation de la forme $x = a$.

Exemple :

$$\begin{aligned}
9x - 2 &= 3x + 1 \\
9x - 3x - 2 &= 3x - 3x + 1 \text{ (on ajoute } -3x \text{ aux deux membres)} \\
6x - 2 &= 0x + 1 \text{ (on réduit)} \\
6x - 2 &= 1 \text{ (on simplifie)} \\
6x - 2 + 2 &= 1 + 2 \text{ (on ajoute 2 aux deux membres)} \\
6x &= 3 \text{ (on simplifie)} \\
\frac{6x}{6} &= \frac{3}{6} \text{ (on divise par 6 les deux membres de l'égalité)} \\
x &= \frac{3}{6} \\
x &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Chapitre 7

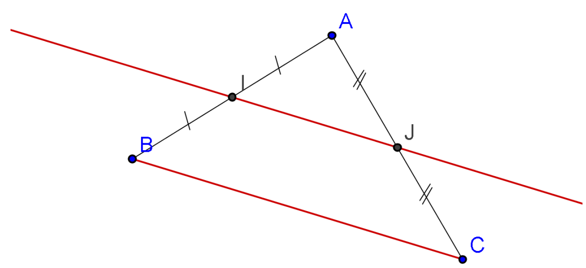
Proportionnalité dans les triangles

7.1 Droite des milieux dans un triangle

7.1.1 Première propriété

Propriété :

Si dans un triangle une droite joint les milieux de deux côtés, alors elle est parallèle au troisième côté.



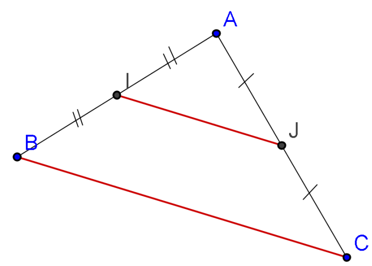
Données :
- ABC est un triangle ;
- I est le milieu du segment $[AB]$;
- J est le milieu du segment $[AC]$.

Conclusion :
Les droites (IJ) et (BC) sont parallèles.

7.1.2 Deuxième propriété

Propriété :

Si dans un triangle, un segment joint les milieux de deux côtés, alors sa longueur est égale à la moitié de la longueur du troisième côté.



Données :
- ABC est un triangle ;
- I est le milieu de $[AB]$;
- J est le milieu de $[BC]$.

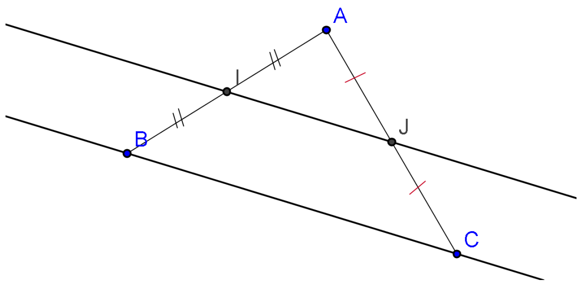
Conclusion :
$IJ = \frac{1}{2}BC$

Preuve des deux premières propriétés :
Soit K le point tel que J est le milieu de [IK].
On sait aussi que J est le milieu de [AC].
D'après la propriété : "si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu alors c'est un parallélogramme" donc AKCI est un parallélogramme.
On sait que AKCI est un parallélogramme.
D'après la propriété : "Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses côtés opposés ont même longueur et sont parallèles" on conclut que (AI) et (KC) sont parallèles et que AI=KC.
I est le milieu de [AB] donc AI=IB d'où IB=KC.
On sait donc que IB=KC et que (IB) est parallèle à (KC). D'après la propriété :" Si un quadrilatère a deux côtés opposés parallèles et de même longueur alors c'est un parallélogramme" on conclut que IBCK est un parallélogramme.
On sait que IBCK est un parallélogramme donc d'après une propriété déjà citée on en déduit que IK=BC et que (IK) est parallèle à (BC). J est le milieu de [IK] donc IJ=JK=(1/2)BC et par suite IJ=(1/2)BC et (IJ) est parallèle à (BC).

7.1.3 Troisième propriété

Propriété :

Si dans un triangle, une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un deuxième côté, alors elle passe par le milieu du troisième côté.



Données :

- ABC est un triangle ;
- I est le milieu de $[AB]$;
- (IJ) et (BC) sont parallèles.

Conclusion :

J est le milieu de $[AC]$.

Preuve :

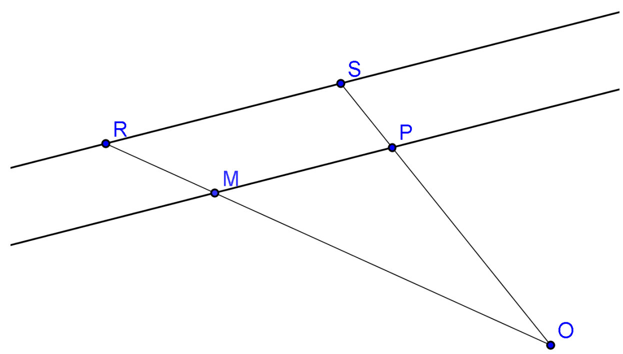
Soit J le milieu de [AC] et J' le point d'intersection de la droite parallèle à (BC) passant par I avec le côté [AC]. Il s'agit de montrer que J et J' sont confondus. On sait que ABC est un triangle et que I est le milieu de [AB], J est le milieu de [AC] donc d'après la première propriété, on en déduit que la droite (IJ) est parallèle à (BC). On sait donc que (IJ) est parallèle à (BC) et passe par I et que (IJ') est parallèle à (BC) et passe par I d'où par unicité de la droite parallèle à une droite donnée et passant par un point donné, J et J' sont confondus.

7.2 Théorème de proportionnalité dans les triangles

Théorème :

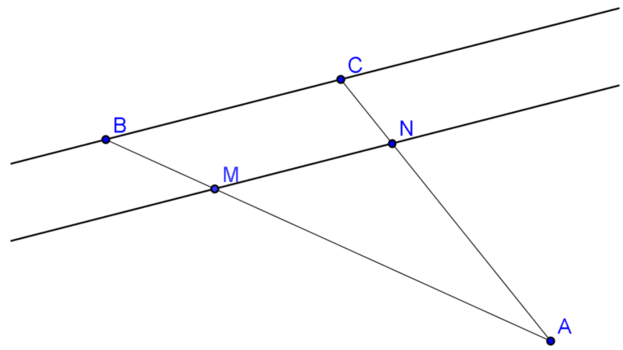
Si dans un triangle ABC,
- M est un point du triangle ABC,
- N est un point du segment $[AC]$,
- et la droite (MN) est parallèle à la droite (BC),

alors
$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$



Données :
- ABC est un triangle ;
- M appartient au segment $[AB]$;
- N appartient au segment $[AC]$;
- les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

Conclusion :
$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$



Exemple d'application :

Sur la figure schématisée,

- $(MP)//(RS)$;
- $OM = 2\ cm$;
- $OR = 5\ cm$;
- $OP = 3\ cm$;
- $MP = 7\ cm$;

Calcul de OS et de MP :

On sait que OSR est un triangle, que M appartient à $[OR]$, P appartient à $[OS]$ et que les droites (MP) et (RS) sont parallèles. D'après la proportionnalité dans les triangles :

$$\frac{OM}{OR} = \frac{OP}{OS} = \frac{MP}{RS}$$

- $\frac{OM}{OR} = \frac{OP}{OS}$
  donc $\frac{2}{5} = \frac{3}{OS}$ en remplaçant par les valeurs.
  d'où $OS = 3 \times \frac{2}{5}$
  c'est à dire $OS = 7,5\ cm$.
- $\frac{OR}{OR} = \frac{MP}{RS}$
  donc $\frac{2}{5} = \frac{7}{RS}$
  d'où $\frac{5}{2} = \frac{RS}{7}$ puis $RS = 7 \times \frac{5}{2}$ c'est à dire $RS = 17,5\ cm$.

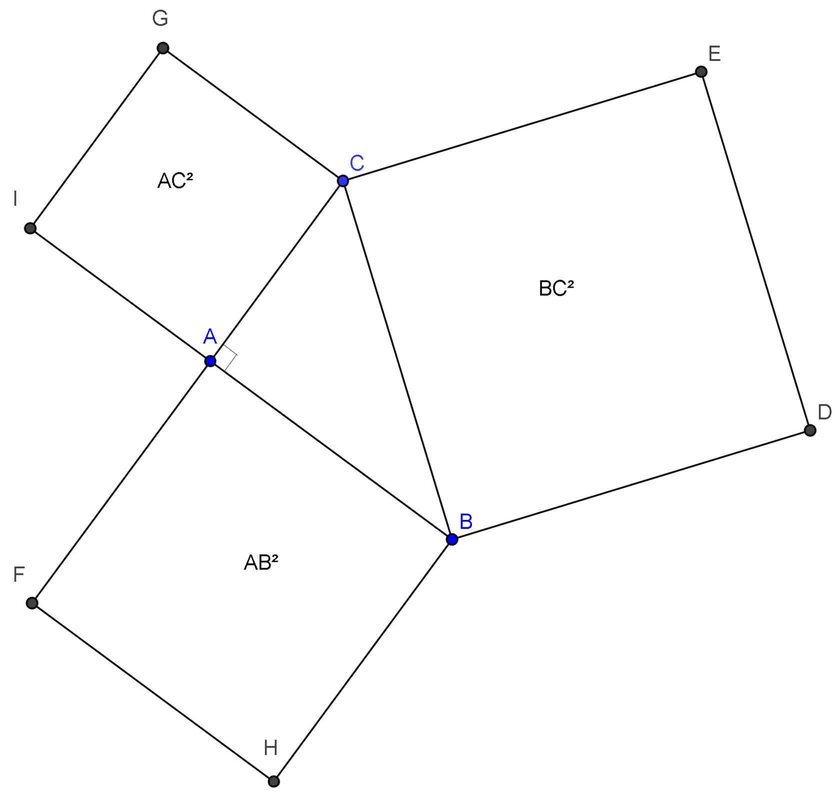
Chapitre 8

Théorème de Pythagore et sa réciproque

8.1 Théorème de Pythagore

Théorème :

Si un triangle est rectangle alors la somme des carrés des côtés de l'angle droit est égale au carré de l'hypoténuse.



Hypothèse :
ABC est un triangle rectangle en A.

Conclusion :
$AB^2 + AC^2 = BC^2$.

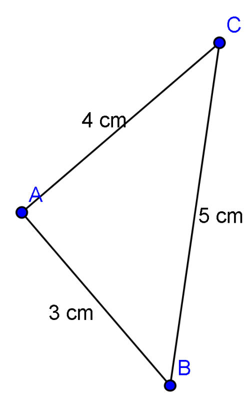
8.2 Réciproque du théorème de Pythagore

Théorème :

Si dans un triangle, le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle et l'hypoténuse est le côté le plus long.

Hypothèse :
$AB^2 + AC^2 = BC^2$

Conclusion :
ABC est un triangle rectangle.



Exemple :
D'une part,

$$AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2$$
$$AB^2 + AC^2 = 9 + 16$$
$$AB^2 + AC^2 = 25$$

D'autre part,

$$BC^2 = 5^2$$
$$BC^2 = 25$$

On constate que $AB^2 + AC^2 = BC^2$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est donc rectangle en A.

Chapitre 9

Distances

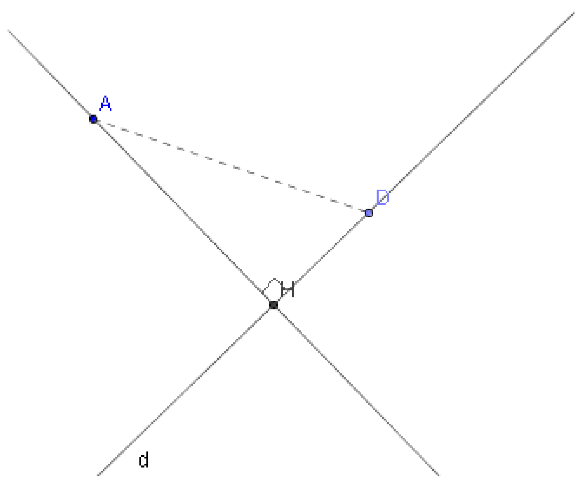
9.1 Distance d'un point à une droite

Définition :

On appelle distance d'un point A à une droite (d) la longueur du plus court segment joignant A à un point de la droite (d).

Propriété :

Soit H le pied de la perpendiculaire à (d) passant par A. Alors la plus courte distance de A à (d) est AH.



Données :
(AH) perpendiculaire à (d) et M appartient à (d).

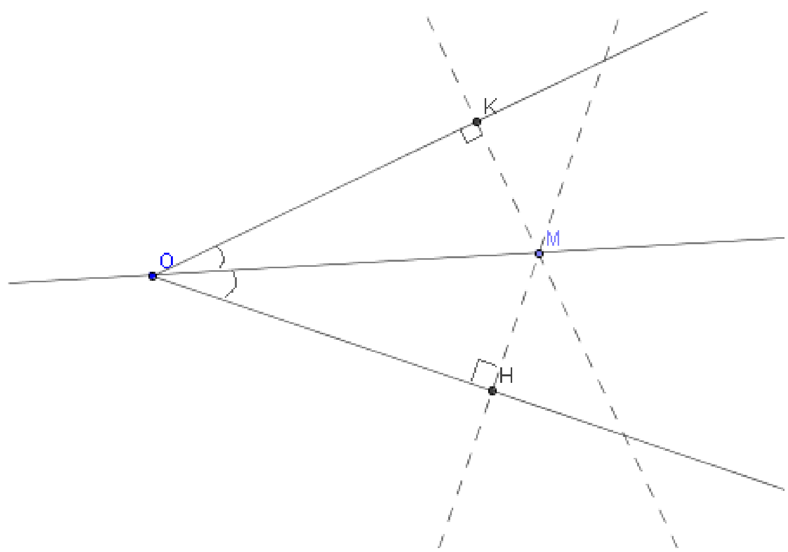
Conclusion :
Pour tout point M de la droite (d), $AH \leq AM$ et pour tout point M différent de H, $AH < AM$.

Preuve :
Soit P un point de la droite (d) et A' le symétrique de A par rapport à la droite (d). D'après l'inégalité triangulaire, $AP + PA' \geq AA'$. En outre, A' est le

symétrique de A par rapport à (d) donc la droite (d) est la médiatrice de $[AA']$. D'après la propriété "si un point appartient à la médiatrice d'un segment alors, il est à égale distance des extrémités du segment" on déduit que H est à égale distance de A et de A' et que P est à égale distance de A et de A'. Or H appartient à $[AA']$ donc $AA' = AH + HA'$ donc l'inégalité ci-dessus s'écrit donc $AP + PA' \geq AH + HA'$. Tenant compte de $AH = A'H$ et $AP = A'P$, on obtient $2 \times AP \geq 2 \times AH$ donc $AP \geq AH$.

Propriété :

- Si un point appartient à la bissectrice d'un angle alors il est à égale distance des côtés de l'angle.
- Si un point est situé à égale distance des côtés d'un angle, alors il appartient à la bissectrice de l'angle.



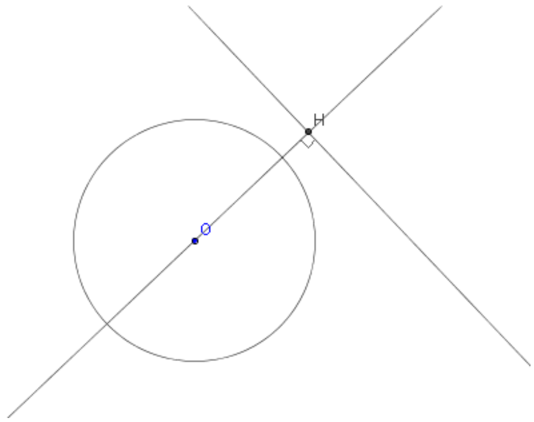
Preuve :

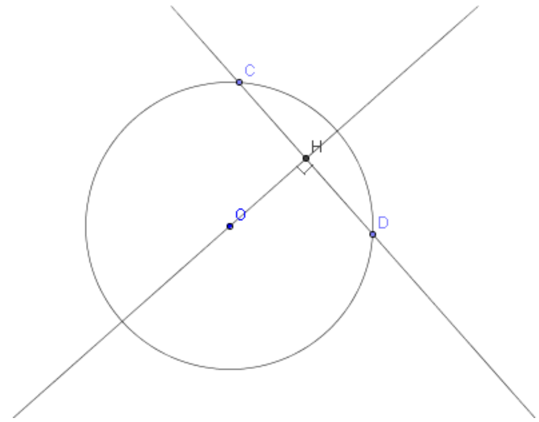
- Soit $\widehat{xOy}$ un angle et M un point de la bissectrice de cet angle. On appelle H le pied de la perpendiculaire au côté $[Ox)$ passant par M et K le pied de la perpendiculaire au côté $[Oy)$ passant par H. Le symétrique de M par rapport à la bissectrice est M lui-même. Par définition de la bissectrice d'un angle, la symétrique de la demi-droite $[Ox)$ par rapport (OM) est $[Oy)$. LA symétrie axiale conserve les angles donc la droite symétrique de la droite (MH) par rapport à la droite (OM) est donc la droite perpendiculaire à la demi-droite symétrique de $[Ox)$ c'est à dire $[Oy)$ et passant par M : c'est (MK). La symétrie axiale conserve les longueurs donc MK et MH sont égales.
- Soit $\widehat{xOy}$ un angle et M un point. On appelle H le pied de la perpendiculaire au côté $[Ox)$ passant par M et K le pied de la perpendiculaire au côté $[Oy)$ passant par H. Si MK et MH sont égales alors MHK est un triangle isocèle. Si un triangle est isocèle, alors les angles à la base sont égaux donc $\widehat{MHK} = \widehat{MKH}$. Donc leurs complémentaires $\widehat{OHK}$ et $\widehat{OKH}$ sont égaux. Si un triangle a deeux angles égaux, alors il est isocèle donc le triangle OHK est un triangle isocèle en O et par suite les longueurs OH et OK sont égales. Si un point est à égale distance des extrémités d'un segment, alors il appartient à la médiatrice de ce segment donc O appartient à la médiatrice de $[KH]$. De même $MH = MK$ implique que M appartient à la médiatrice de $[HK]$ et par suite les points H et K sont symétriques par rapport à (OM). Les angles $\widehat{HOM}$ et $\widehat{MOK}$ sont symétriques aussi donc égaux et par suite (MO) est bien la bissectirce de l'angle $\widehat{xOy}$.

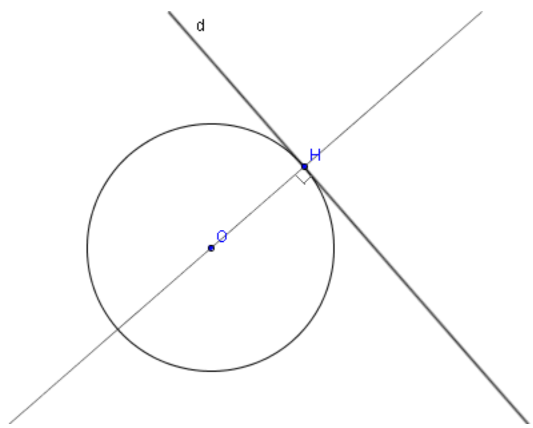
9.2 Positions relatives d'un cercle et d'une droite

Propriété :

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre un point O et de rayon r et soit (d) une droite. On appelle H le pied de la perpendiculaire à (d) passant par le point O.
- Si $OH < r$, alors la droite est sécante au cercle ; la droite et les cercle ont deux points communs ;
- Si $OH = r$, alors la droite est tangente au cercle ; la droite et le cerlce ont un unique point commun ;
- Si $OH > r$, alors la droite et le cercle n'ont aucun point commun.







Preuve :

- Si $OH = r$ pour tout point M de la droite (d) différent de H , on a (OH) perpendiculaire à (d) et passant par O donc OH est la plus courte distance à (d) et donc $OH < OM$ d'où $OM > r$ et par suite M n'appartient par au cercle.
- Si $OH > r$, pour tout point M de la droite (d), on a (OH) perpendiculaire à (d) et passant par O donc OH est la plus courte distance à (d) et donc $OH \leq OM$ ce qui entraîne que $r < OM$ donc que M n'appartient pas au cercle. Par conséquent, le cercle et la droite n'ont aucun point commun.

Chapitre 10

Pyramides et cônes de révolution

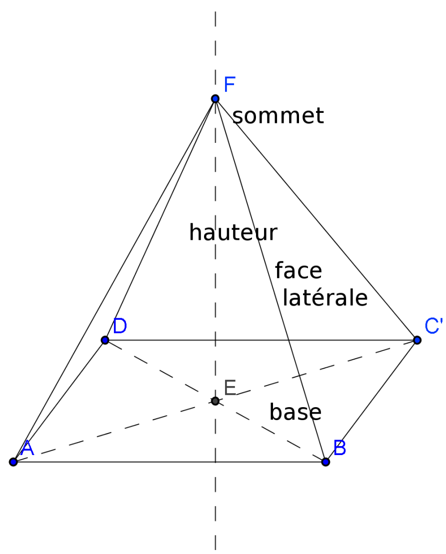
10.1 Fabrication d'un patron

10.2 Description et représentation

10.2.1 Pyramide

Définition :

Une *pyramide* est un solide limité par :
- des faces triangulaires ayant un sommet commun, le sommet de la pyramide ;
- une face polygonale appelée *base* de la pyramide.



Définition :

Une *pyramide régulière* est une pyramide telle que :
- la base est un polygone régulier ;
- la hauteur passe par le centre de la base.

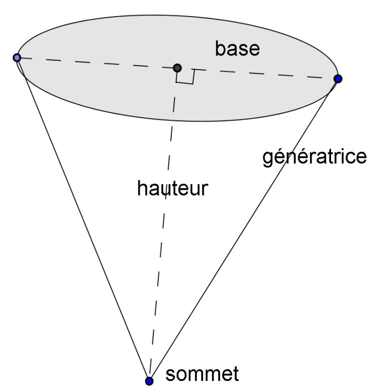
Propriété :

Dans une pyramide régulière, les faces latérales sont toutes identiques.

10.2.2 Cône de révolution

Définition :

Un *cône de révolution* est le solide engendré par un triangle rectangle effectuant un tour complet autour d'un côté de l'angle droit.



Propriété :

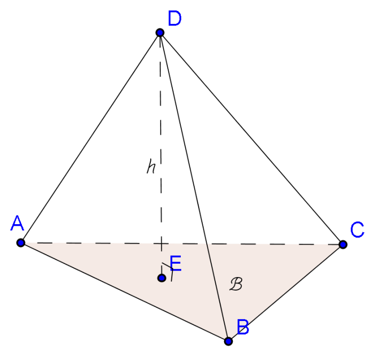
Dans un cône de révolution, la hauteur passe par le centre du disque de base.

10.3 Volume

Propriété :

Le volume $\mathcal{V}$ d'une pyramide ou d'un cône de révolution d'aire de la base $\mathcal{B}$ et de hauteur h est donné par la formule :

$$\mathcal{V} = \mathcal{B} \times h$$


D
h
A
C
E
$\mathcal{B}$
B

Chapitre 11

Droites remarquables du triangle

11.1 Différentes droites

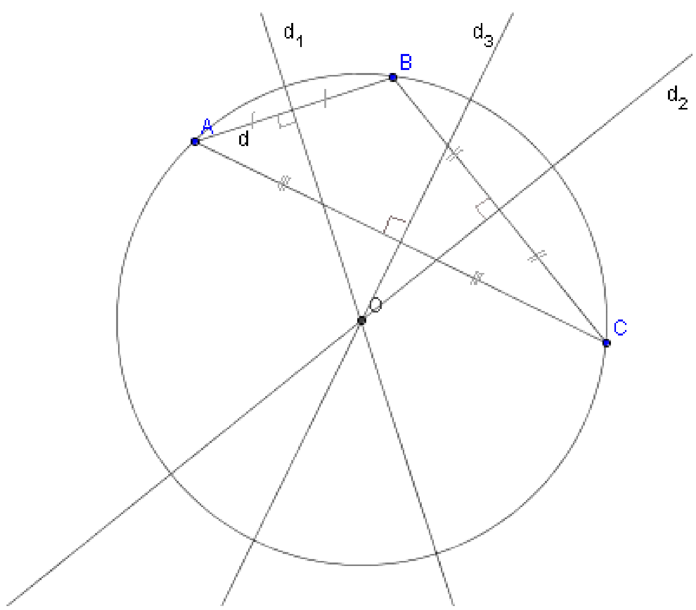
11.1.1 Médiatrices

Définition :

La médiatrice d'un segment est la droite perpendiculaire à ce segment et passant par son milieu.

Propriétés :

- Les médiatrices des côtés d'un triangle se coupent en un même point. On dit qu'elles sont concourantes.
- Ce point est le centre du cercle passant par les sommets du triangle et appelé cercle circonscrit au triangle.



Preuve :
Soit ABC un triangle non aplati et soient (d_1), (d_2) et (d_3) les médiatrices respectives des côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$.
Puisque le triangle n'est pas aplati, les droites (d_1) et (d_2) se coupent en un point O. Il s'agit de montrer que le point O est aussi sur (d_3).
On sait que O est sur la médiatrice (d_1) de $[AB]$. D'après la propriété : "si un point appartient à la médiatrice d'un segment alors il est à égale distance des extrémités du segment" on en déduit que $OA = OB$.
De même, O est sur la médiatrice (d_2) de $[BC]$ donc $OB = OC$.
$OA = OB$ et $OB = OC$ donc $OA = OC$. D'après la propriété : "si un point est situé à égale distance des extrémités d'un segment alors il appartient à la médiatrice de ce segment", on en déduit que O appartient à la médiatrice (d_3) du segment $[AC]$, ce qu'il fallait démontrer. $\odot$

11.1.2 Hauteurs

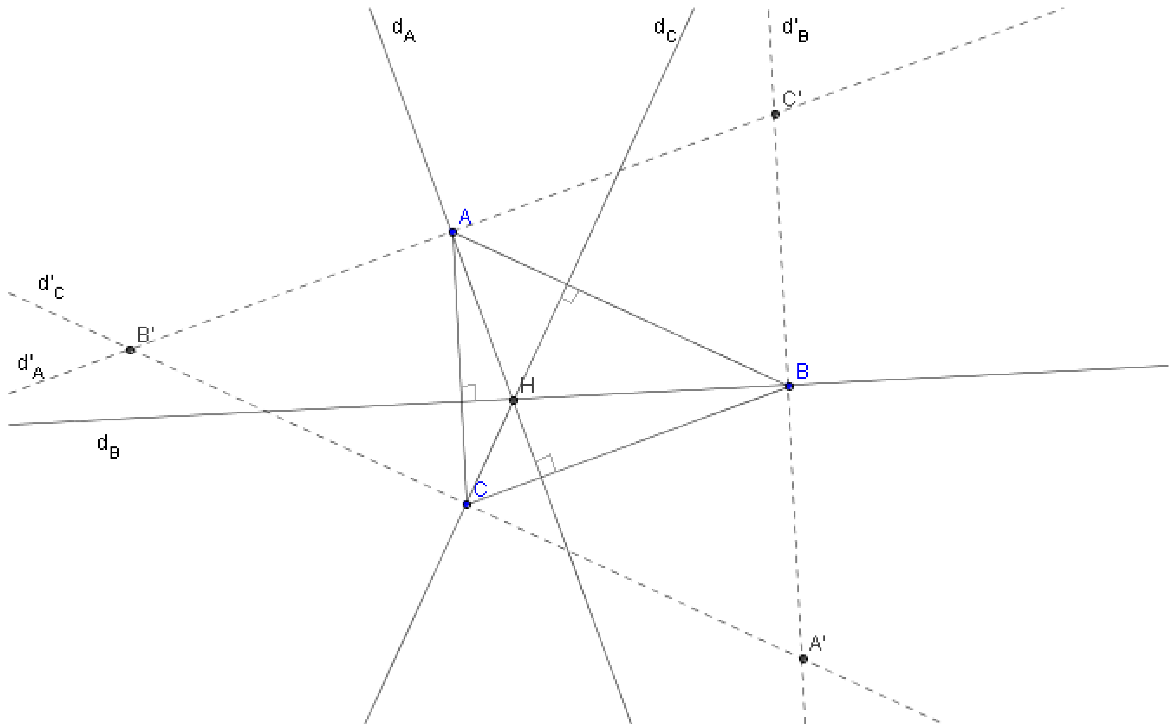
Définition :

Dans un triangle, les hauteurs sont les droites passant par un sommet et perpendiculaires au côté opposé.

Propriété :

Les hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point appelé orthocentre du triangle.

Preuve :
Soit ABC un triangle non aplati. Soit (d_A) la hauteur issue de A, (d_B) la hauteur issue de B et (d_C) la hauteur issue de C. Soient (d'_C) la droite parallèle à la droite (AB) et passant par le point C, (d'_A) la droite parallèle à la droite (BC) passant par le point A et (d'_B) la droite parallèle à (AC) passant par le point B.
(d'_A) et (d'_B) se coupent en un point C', (d'_B) et (d'_C) se coupent en au point A' et (d'_A) et (D'_C) se coupent en un point B'.
On va d'abord montrer que (d_B) est la médiatrice du segment $[A'C']$:
On sait que $(A'C)$ et (AB) sont parallèles et que $(A'B)$ et (AC) sont parallèles.
D'après la propriété : "si un quadrilatère a ses côtés parallèles deux à deux alors



c'est un parallélogramme", on en déduit que $ABA'C$ est un parallélogramme.
On sait donc que $ABA'C$ est un parallélogramme d'où d'après la propriété : "si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses côtés opposés sont égaux et parallèles" on en déduit que $A'B = AC$ et que (AC) et $(A'B)$ sont parallèles.
On montre de même en utilisant le parallélogramme $ACBC'$ que $BC' = AC$.
$A'B = AC$ et $BC' = AC$ donc $A'B = BC'$ d'où B est le milieu de $[A'C']$.
On sait que la hauteur (d_B) est perpendiculaire au côté (AC) et que (AC) et $(A'B)$ sont parallèles donc d'après la propriété : "si deux droites sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre", les droites (d_B) et $(A'C')$ sont perpendiculaires.
Finalement, (d_B) coupe $[A'C']$ perpendiculairement en son milieu B donc c'est la médiatrice de $[A'C']$.
De même, on montre que (d_A) est la médiatrice de $[B'C']$ et que (d_C) est la médiatrice de $[A'B']$.Les médiatrices d'un triangle sont concourantes donc les droites (d_A), (d_B) et (d_C) sont concourantes. $\odot$

11.1.3 Médianes

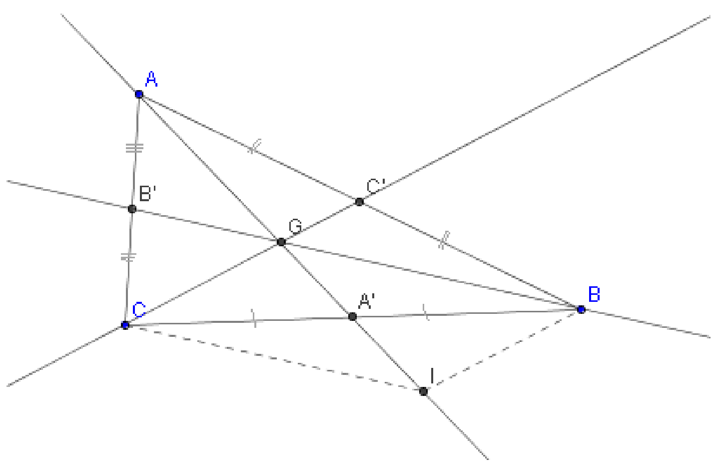
Définition :

Dans un triangle, les médianes sont les droites passant par un sommet et passant par le milieu du côté opposé.

Propriétés :

- Les médianes d'un triangle sont concourantes en un point appelé centre de gravité du triangle.
- Si dans un triangle, un point est l'intersection de deux médianes, alors il est situé aux deux tiers de chaque médiane à partir des sommets.
  C'est à dire,

$$AG = \frac{2}{3}AA' \; ; \; BG = \frac{2}{3}BB' \; ; \; CG = \frac{2}{3}CC'$$



Preuve :
Soit ABC un triangle non aplati. On appelle A', B' et C' les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$. Soit G le point d'intersection de (CC') et (BB'). Soit I

le point tel que G est le milieu de $[AI]$. Soit A'' le point d'intersection de (AG) et de $[BC]$. Il s'agit donc de montrer que A'' est le milieu de $[BC]$ c'est à dire que A' et A'' sont confondus. On sait que dans le triangle ABI, C' est le milieu de $[AB]$ et que G est le milieu de $[AI]$. D'après la propriété "si dans un triangle, une droite passe par le milieu de deux côtés, alors elle est parallèle au troisième" on en déduit que $(C'G)$ est parallèle à (BI) et d'après la propriété "si dans un triangle, un segment joint les milieux de deux côtés, alors sa longueur vaut la moitié de celle du troisième côté" on en déduit que $BI = 2C'G$.
De même on montre dans le triangle CAI que les droites (BB') et (CI) sont parallèles. On sait donc que (BG) est parallèle à (CI) et que (GC) est parallèle à (BI) donc d'après la propriété "si un quadrilatère a ses côtés opposés parallèles, alors c'est un parallélogramme" on en déduit que $BGCI$ est un parallélogramme. $BGCI$ étant un parallélogramme, d'après la propriété "si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses diagonales se coupent en leur milieu" donc le milieu A' de $[BC]$ est aussi le milieu de la diagonale $[IG]$ et par conséquent A' et le point d'intersection A'' de (AG) avec (BC) sont confondus.
Pour montrer que $CG = \frac{2}{3}CC'$, on sait que $BGCI$ est un parallélogramme donc d'après la propriété "si un quadrilatère est un parallélogramme, alors se côtés opposés ont même longueur" on déduit que $GC = BI$. Puis, de $GC = BI$ et de $BI = 2C'G$ on déduit que $GC = 2C'G$ donc $CG = 2C'C + 2CG$ d'où $CG = \frac{2}{3}CC'$.

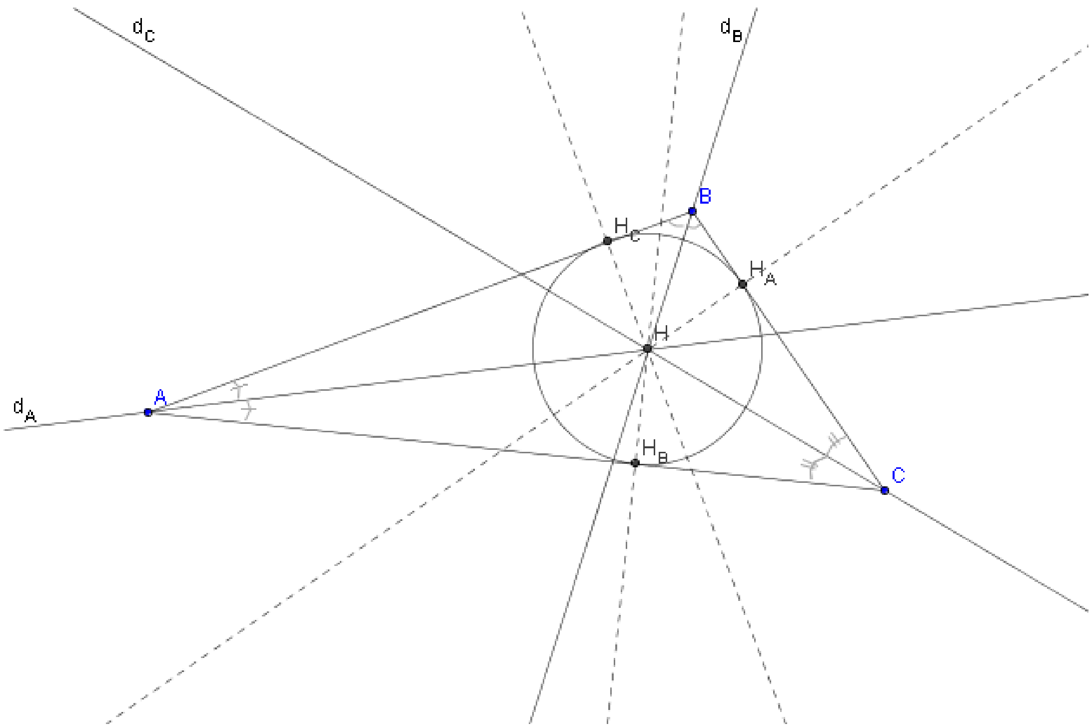
11.1.4 Bissectrices

Définition :

La bissectrice d'un angle est la droite qui partage l'angle en deux angles égaux.

Propriétés :

- Les bissectrices d'un triangle sont concourantes.
- Ce point d'intersection H est le centre d'un cercle appelé cercle inscrit dans le triangle qui passe par les points d'intersection des droites perpendiculaires aux côtés et passant par H.



Preuve :
Soit ABC un triangle et (d_A), (d_B) et (d_C) les bissectrices des angles $\widehat{BAC}$, $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ respectivement.
Soit H le point d'intersection de (d_A) et de (d_B). D'après la propriété "Si un point appartient à la bissectrice d'un angle alors il est à égale distance des côtés" on en déduit que H est à égale distance de (AB) et de (AC) d'une part et à égale distance de (AB) et (BC). On en conclut donc que H est à égale distance de (AC) et (BC). D'après la propriété "si un point est à égale distance des côtés d'un angle alors il se trouve sur la bissectrice de cet angle, on en conclut que H se trouve sur la bissectrice de $\widehat{ACB}$ c'est à dire sur (d_C). Les trois bissectrices sont donc concourantes en H.
En outre, si l'on appelle H_A le point d'intersection de la perpendiculaire à (BC) passant par H, H_B le point d'intersection de la perpendiculaire à (AC) passant par H et H_C le point d'intersection de la perpendiculaire à (AC) passant par H, les distances de H à (BC), à (AC) et à (AB) son respetivement données par HH_A, HH_B et HH_C et on a montré qu'elles sont égales donc le cercle de centre

H et de rayon HH_A passe par les trois points H_A, H_B et H_B.

11.2 Applications

Propriétés :

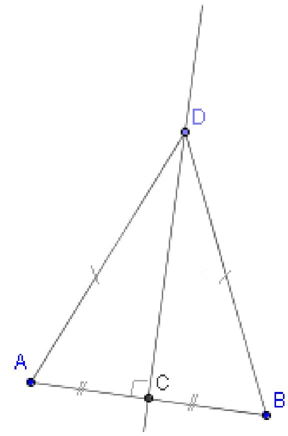
- Si une droite passe par un sommet et le centre de gravité d'un triangle, alors c'est une médiane, elle coupe le côté opposé en son milieu.
- Si une droite passe par un sommet et l'orthocentre d'un triangle, alors c'est une hauteur, elle est perpendiculaire au côté opposé.

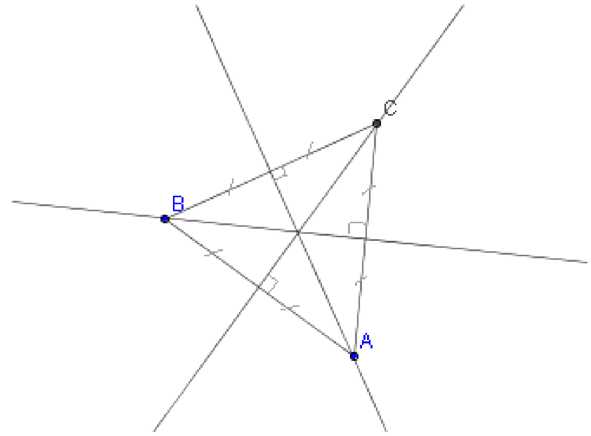
Preuve :
- Soit ABC un triangle et G son centre de gravité. On considère la droite passant par A et G. Les médianes du triangle sont concourantes en G. La médiane issue de A est la droite passant par A et par le milieu du côté opposé. Elle coupe les deux autres médianes en G donc elle passe par A et G. Par unicité de la droite passant par dexu points données, la droite passant par A et G est donc la médiane issue de A et elle coupe le côté opposé en son milieu.
- De même que précédemment, cette droite est une hauteur et elle est donc perpendiculaire au côté opposé.

11.3 Cas des triangles particuliers

Propriétés :

- Si un triangle est isocèle, alors la hauteur, la médiane, la bissectrice issues du sommet principal ainsi que la médiatrice de la base sont confondues.
- Si un triangle est équilatéral, alors les hauteurs, les médianes, les médiatrices et les bissectrices sont confondues.





Preuve :

- Soit ABC un triangle isocèle de sommet principal A. Comme AB et AC sont égales, la médiatrice de la base passe par A. Soit I le milieu de $[BC]$. La droite (AI) est donc la médiatrice de la base. Elle passe par A et elle est perpendiculaire à (BC), donc c'est la hauteur issue de A. Elle passe par le milieu I de $[BC]$ et par le sommet principal A donc c'est la médiane issue de A. Enfin, (AI) est la médiatrice de $[BC]$ donc B a pour symétrique C par rapport à (AI) et A est son propre symétrique. Par conséquent, l'angle $\widehat{BAI}$ et l'angles $\widehat{CAI}$ sont symétriques par rapport à (AI). La symétrie axiale conserve les angles donc ces deux angles sont égaux et (AI) est aussi la bissectrice de $\widehat{BAC}$.
- Soit ABC un triangle équilatéral, il est donc isocèle en A et d'après la propriété précédente, la hauteur, la médiane, la bissectrice issues de A ainsi que la médiatrice de $[BC]$ sont confondues. De même, le triangle ABC est isocèle en B donc la hauteur, la bissectrice, la médiane issues de B ainsi que la médiatrice de $[AC]$ sont confondues. Enfin, le triangle est aussi isocèle en C donc la hauteur, la médiane, la bissectrice issues de C ainsi que la médiatrice de $[AB]$ sont confondues.

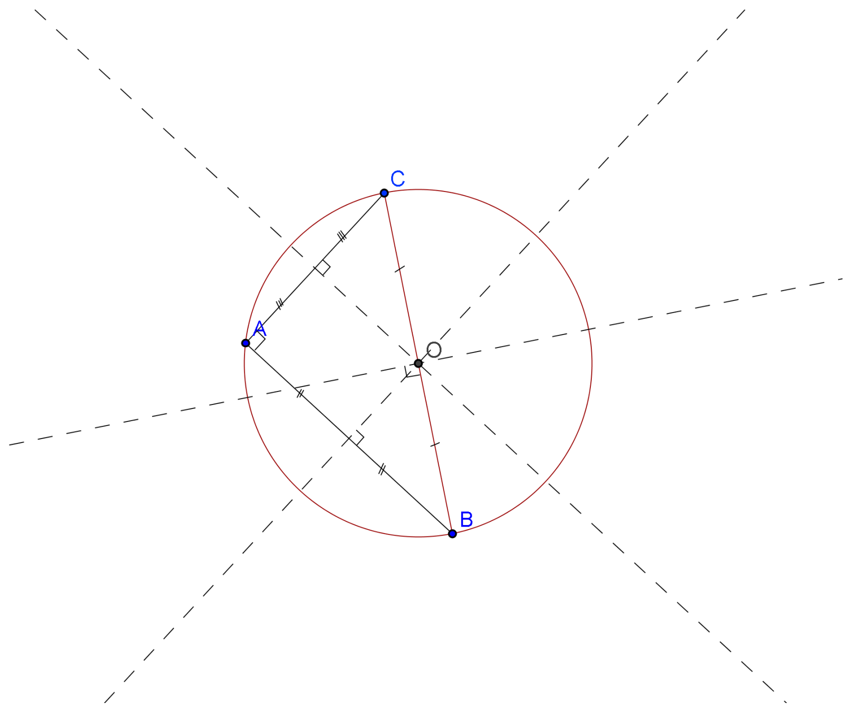
Chapitre 12

Triangles rectangles et cercles

12.1 Théorème direct

Théorème :

Si un triangle est rectangle, alors son hypoténuse est un diamètre du cercle circonscrit à ce triangle.



Preuve :
Soit ABC un triangle rectangle en A et O le milieu de l'hypoténuse $[BC]$. Soit D le point tel que O est le milieu de $[AD]$. On sait que O est le milieu de $[BC]$ et que O est le milieu de $[AD]$. D'après la propriété : "Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu alors c'est un parallélogramme", donc $ABDC$ est un parallélogramme.

On sait que $ABDC$ est un parallélogramme et que $\widehat{BAC}$ est un angle droit. D'après la propriété : "Si un parallélogramme a un angle droit alors c'est un rectangle" on en conclut que $ABDC$ est un rectangle.
On sait que $ABDC$ est un rectangle. D'après la propriété : "Si un quadrilatère est un rectangle, alors ses diagonales se coupent en leur milieu et sont de même longueur" on conclut que $OA = OB = OC$. $OA = OB$ donc d'après la

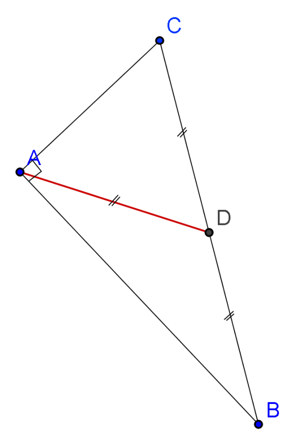
propriété ”Si un point se trouve à égale distance des extrémités d’un segment, alors il appartient à la médiatrice de ce segment” on en déduit que O appartient à la médiatrice de $[AB]$. De même de $OB = OC$ on déduit que O appartient à la médiatrice de $[BC]$ et de $OA = OC$ on déduit que O appartient à la médiatrice de $[AC]$. Par définition, le centre du cercle circonscrit à un triangle est le point d’intersection des médiatrices donc O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC et par suite $[BC]$ en est un diamètre.

Conséquence :

Si un triangle est rectangle, alors le milieu de l’hypoténuse est le centre du cercle circonscrit à ce triangle.

Propriété :

Si un triangle est rectangle, alors la longueur de la médiane issue de l’angle droit est égale à la moitié de la longueur de l’hypoténuse.



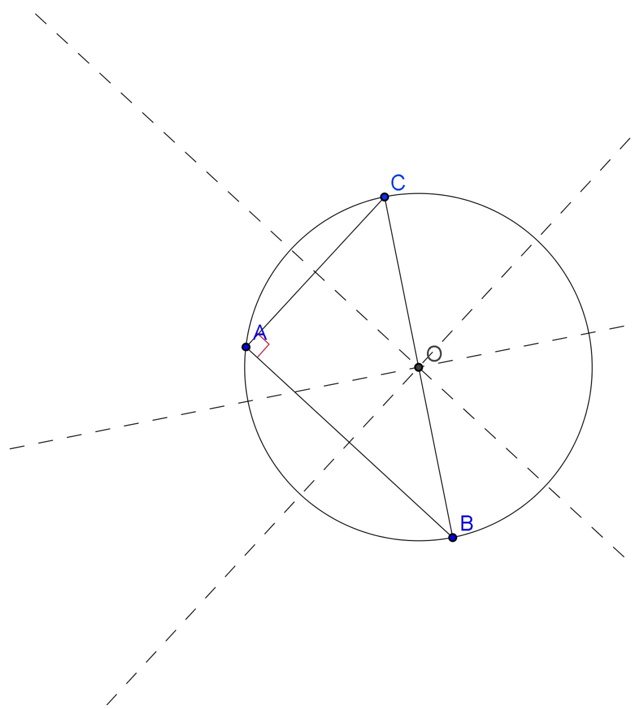
Preuve :

Soit ABC un triangle rectangle en A et O le milieu de l'hypoténuse $[BC]$. On sait que ABC est un triangle rectangle en A donc d'après la propriété "Si un triangle est rectangle, alors le milieu de l'hypoténuse est le centre du cercle circonscrit à ce triangle" on en déduit que O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. Par définition, le centre du cercle circonscrit à un triangle est le point d'intersection des médiatrices des côtés du triangle donc O est le point d'intersection des médiatrices des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$. D'parès la propriété "si un point appartient à la médiatrice d'un segment, alors il se trouve à égale distance des extrémités d'un segment" on en déduit que $OA = OB$, $OA = OC$ et $OB = OC$ c'est à dire que $OA = OB = OC$ donc $OA = \frac{1}{2}BC$.

12.2 Théorème réciproque

Théorème :

Si un triangle inscrit dans un cercle a un diamètre pour côté, alors c'est un triangle rectangle.

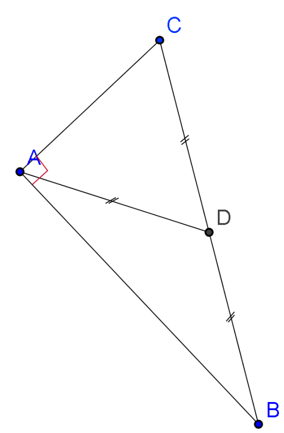


Preuve :

Soit ABC un triangle inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$ et tel que $[AB]$ est un diamètre du cercle. on appelle O le centre du cercle et on appelle D le symétrique de C par rapport à O.
On sait que $[AB]$ est un diamètre du cercle donc que O est le milieu $[AB]$ et on sait que C et D sont symétriques par rapport à O donc que O est le milieu de $[CD]$ donc d'après la propriété "Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu alors c'est un parallélogramme " on conclut que $ADBC$ est un parallélogramme.
$OD = OC$ donc O est sur le cercle $\mathcal{C}$. On sait donc que
$OA = OB = OC = OD$ d'où d'après la propriété "si un parallélogramme a ses diagonales de même longueur alors c'est un rectangle " on conclut que $ADBC$ est un rectangle donc que $\widehat{BAC}$ est un angle droit.

Conséquence :

Si dans un triangle, la médiane issue d'un sommet a pour longueur la moitié de la longueur du côté opposé, alors ce triangle est rectangle.



Preuve :

Soit ABC un triangle et $[OA]$ une médiane avec O milieu de $[BC]$. Par hypothèse on a donc $OA = \frac{1}{2}BC$ et comme O est le milieu de $[BC]$, on a donc $OB = OC$ d'où finalement $OA = OB = OC$. On en déduit que O est le centre du cercle circonscrit $\mathcal{C}$ au triangle ABC. Ce triangle ABC est donc inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$ et $[BC]$ en est un diamètre. D'après la propriété "Si un triangle inscrit dans un cercle a un diamètre pour côté, alors c'est un triangle rectangle" on en conclut que ABC est un triangle rectangle.

Chapitre 13

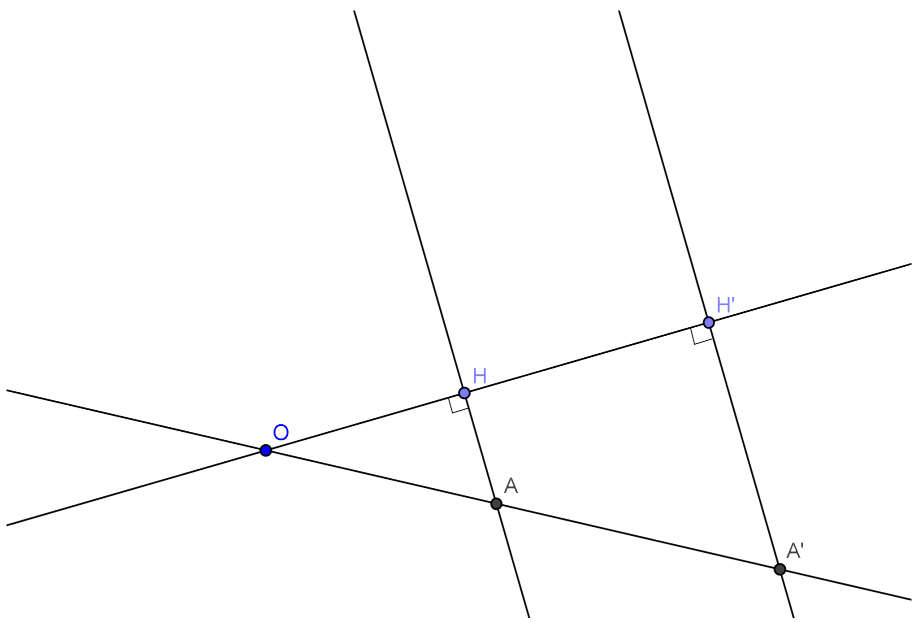
Cosinus d’un angle aigu

13.1 Définition et vocabulaire

Propriété et définition :

Etant donné un angle aigu $\widehat{xOy}$, si A est un point d'un côté de l'angle et H le pied de la perpendiculaire à l'autre côté de l'angle et passant par A, alors le quotient $\frac{OH}{AH}$ est indépendant du choix du point A.
Ce quotient s'appelle le *cosinus* de l'angle $\widehat{xOy}$. On note

$$\cos \widehat{xOy} = \frac{OH}{OA}$$



Preuve :
Soit A' un autre point du côté $[OA)$ de l'angle $\widehat{xOy}$ et H' le pied de la perpendiculaire à $[Oy)$ et passant par A'. On a donc (AH) perpendiculaire à (Oy) et $(A'H')$ perpendiculaire à (Oy). D'après la propriété "si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles", on en déduit que (AH) est parallèle à $(A'H')$.
O, A et A' sont alignés et O, H et H' sont alignés dans le même ordre. (AH) et $(A'H')$ sont parallèles. D'après la propriété de proportionnalité dans les

triangles, on a donc

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{OH}{OH'} = \frac{AH}{A'H'}$$

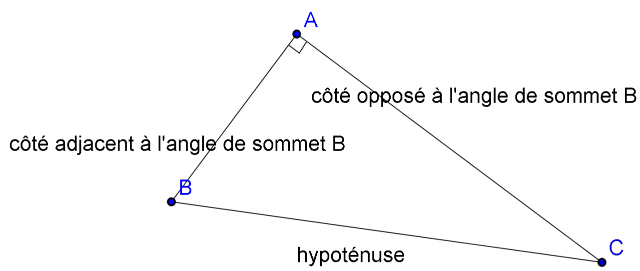
$\frac{OA}{OH} = \frac{OA'}{OH'}$ donc le quotient $\frac{OA}{OH}$ est bien indépendant du point A choisi sur $[Ox)$.

Propriété :

Soit ABC un triangle rectangle en A, on a :

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{\text{côté adjacent à l'angle}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{AB}{BC}$$



Propriété :

Le cosinus d'un angle aigu est un nombre compris entre 0 et 1.

13.2 Utilisations du cosinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle

Attention :

Pour effectuer les calculs ci-dessous, la calculatrice doit être en mode DEGRES.

13.2.1 Calcul d'angles

Exemple :
Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AB = 3cm$ et $BC = 5cm$.

Dans le triangle ABC rectangle en A :

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{AB}{BC}$$
$$\cos \widehat{ABC} = \frac{3}{5}$$
$$\cos \widehat{ABC} = 0,6$$

On utilise alors la touche cos^{-1} ou $arcos$ suivant la calculatrice et on obtient $\widehat{ABC} \approx 53,1°$.

13.2.2 Calcul de longueurs

Exemple :

Soit EFG un triangle rectangle en F tel que $EF = 6\,\text{cm}$ et $\widehat{FEG} = 40°$. Dans le triangle EFG rectangle en F :

$$\begin{aligned}\cos \widehat{EFG} &= \frac{EF}{FG}\\ \cos 40° &= \frac{6}{FG}\\ \frac{1}{\cos 40°} &= \frac{FG}{6}\\ FG &= 6 \times \frac{1}{\cos 40°}\end{aligned}$$
$$FG \approx 7,8\,\text{cm}$$

Index