Vecteurs cours 3e

F.Gaudon

23 octobre 2004

Table des matières

1 Translations et vecteurs

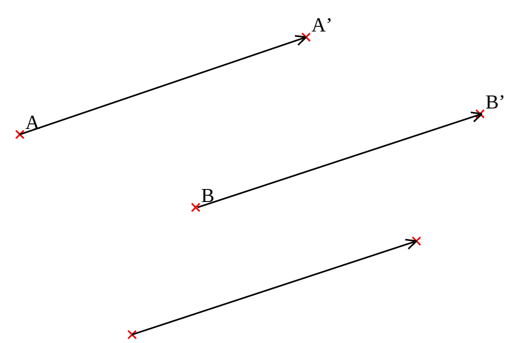
Définitions :

- On dit que deux droites ont la même direction Lorsqu'elles sont parallèles ;
- une direction étant donnée par une droite (AB), il existe deux sens de parcours de cette droite.

Définition :

Soient deux points A et A' ainsi que la translation qui transforme A en A'. Soient des points B et C ainsi que leurs images par cette translation. On dit que les couples (A ;A'), (B ;B') et (C ;C') définissent un vecteur. On note $A\vec{A'}$ ou $B\vec{B'}$ ou $C\vec{C'}$ ou encore $\vec{u}$. On a donc

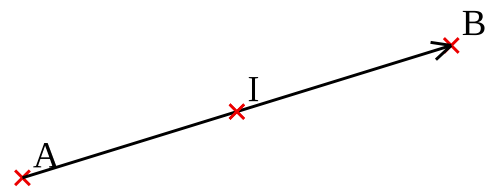
$$A\vec{A'} = B\vec{B'} = C\vec{C'} = \vec{u}$$



Remarque :
Dire que $A\vec{A'} = B\vec{B'}$ signifie donc :
- (AA') et (BB') sont parallèles, les deux vecteurs ont donc même *direction* ;
- les deux vecteurs ont le même *sens* de A vers A' ;
- ils ont la même longueur, $AA' = BB'$.

Propriété :

- Si un point I est le milieu d'un segment [AB], alors $\vec{AI} = \vec{IB}$;
- Si un point I vérifie $\vec{AI} = \vec{IB}$, alors I est le milieu du segment [AB].



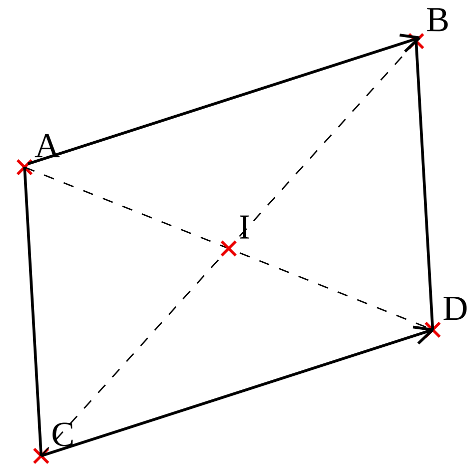
Preuve :

- Si I est le milieu de [AB] alors $AI = IB$, A, I et B étant alignés dans cet ordre, les vecteurs $\vec{AI}$ et $\vec{IB}$ ont même direction et le sens de A vers I est le même que celui de de I vers B ;
- Si $\vec{AI} = \vec{IB}$ alors $AI = IB$, les droites (AI) et (IB) sont parallèles donc confondues et les points A, I et B sont donc alignés. Ils sont alignés dans cet ordre d'après le sens des vecteurs.

2 Égalité vectorielle et parallélogramme

Propriété :

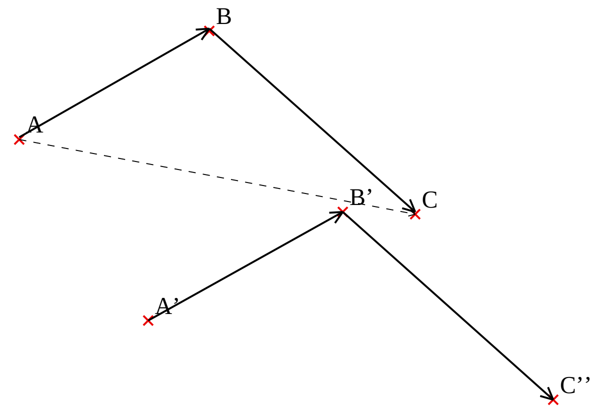
Soient quatre points A, B, C et D.
- Si $\vec{AB} = \vec{CD}$ alors le quadrilatère ABDC est un parallélogramme ;
- Si le quadrilatère ABDC est un parallélogramme, alors $\vec{AB} = \vec{CD}$.



Preuve :

- On suppose que $\vec{AB} = \vec{CD}$, alors les droites (AB) et (CD) sont parallèles et $AB = CD$. Si un quadrilatère non croisé a deux côtés opposés parallèles et de même longueur, alors c'est un parallélogramme. Donc ABDC est un parallélogramme.
- On suppose que ABDC est un parallélogramme. Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses côtés opposés sont parallèles et de même longueur. Donc $AB = CD$ et (AB) et (CD) sont parallèles. Le sens de A vers B et de C vers D étant les mêmes, on a donc $\vec{AB} = \vec{CD}$.

3 Somme de deux vecteurs



Propriété et définition :

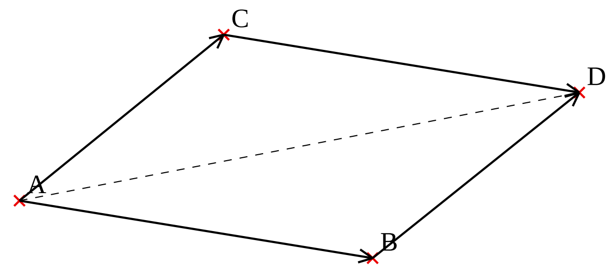
Appliquer la translation de vecteur $\vec{AB}$ puis la translation de vecteur $\vec{BC}$, revient à appliquer la translation de vecteur $\vec{AC}$. On dit que la composée de deux translations est une translation. On dit aussi que le vecteur $\vec{AC}$ est la somme des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{BC}$. On note $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ (relation dite de Chasles).

Remarque :

- Le vecteur $\vec{AA}$ ou $\vec{BB}$ est appelé vecteur *nul* et noté $\vec{0}$. on a $\vec{AB} + \vec{O} = \vec{AB}$.
- Le vecteur $\vec{BA}$ est appelé le vecteur *opposé* au vecteur $\vec{AB}$ et noté $-\vec{AB}$ car $\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{0}$.

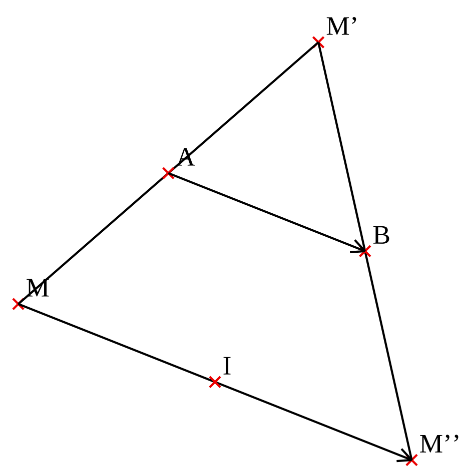
Propriété (règle du parallélogramme) :

Soient trois points A, B et C non alignés. Si M est un point tel que le quadrilatère ABMC est un parallélogramme, alors la somme des vecteurs $\vec{AB} + \vec{AC}$ est le vecteur $\vec{AM}$.



Preuve :
ABMC est un parallélogramme donc $\vec{AC} = \vec{BM}$. Donc
$\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BM}$ c'est à dire $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AM}$.

4 Composée de deux symétrie centrales



Propriété :

Soient A et B deux points. Appliquer la symétrie centrale de centre A puis la symétrie centrale de centre B revient à appliquer la translation de vecteur $\vec{u} = 2\vec{AB}$ où l'on a noté $2\vec{AB} = \vec{AB} + \vec{AB}$.

Preuve :

Soit M un point, M' son symétrique par rapport au point A et M" le symétriques de M' par la symétrie de centre B. M et M' sont symétriques par rapport à A donc A est le milieu de [MM']. M" et M' sont symétriques par rapport à B donc B est le milieu de [M'M"]. Si dans un triangle, un segment joint les milieu de deux côtés du triangle, alors il a pour longueur la moitié du troisième côté. Donc $MM'' = 2AB$. Soit C le point tel que $\vec{AC} = 2 \times \vec{AB}$. Si dans un triangle, une droite passe par les milieux de deux côtés du triangle, alors elle est parallèle au troisième côté. Donc (MM") et (AB) sont parallèles c'est à dire (MM") et (AC) sont parallèles. Le sens de M vers M' étant le même que de A vers C, on en déduit donc que $\vec{MM''} = \vec{AC}$ donc $\vec{MM''} = 2\vec{AB}$.