Théorème de Thalès et réciproque cours 3e

F.Gaudon

23 octobre 2004

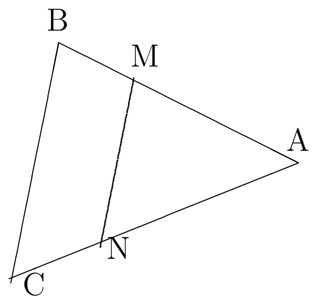
Table des matières

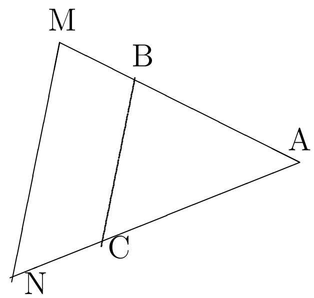
1 Théorème de Thalès

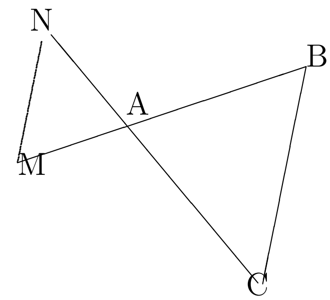
Théorème :

On considère deux droites (d) et (d') sécantes en un point A. Soit M et B deux points de la droite (d) et N et C deux points de la droite (AC). Si les droites (MN) et (BC) sont parallèles, alors les triangles AMN et ABC ont leurs côtés proportionnels. C'est à dire :

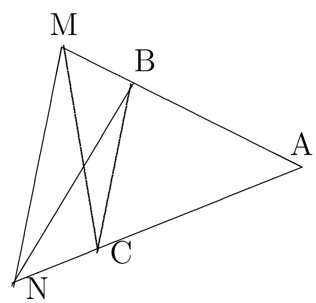
$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$







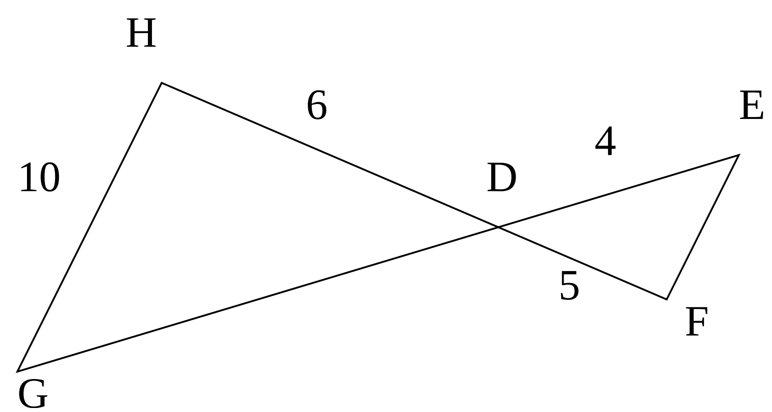
Preuve (cas particulier) :



Soit AMN un triangle avec B appartenant à [AM] et C appartenant à [AN] tels que (MN) et (BC) sont parallèles. Cette démonstration utilise systématiquement la formule de calcul de l'aire d'un triangle de base b et de hauteur associée h : $\frac{b \times h}{2}$.
Les triangles MBC et NBC ont la base [BC] commune et des hauteurs associées à [BC] de même longueur donc ils ont la même aire.

Par conséquent,
$$\frac{aire(BCM)}{aire(BCA)} = \frac{aire(BCN)}{aire(BCA)}$$
En outre, en considérant les triangles ABN et ABC, ils ont la même hauteur issue du sommet B (c'est la hauteur associée au côté [AC] dans le triangle ABC et la hauteur associée au côté [AN] dans le triangle ABN). Par conséquent,
$$\frac{aire(BCN)}{aire(ABC)} = \frac{AN}{AC}$$
De même, en considérant les triangles ABM et ABC, on a
$$\frac{aire(BCM)}{aire(ABC)} = \frac{AM}{AB}$$
Finalement, on a donc
$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$$

Exemple d'utilisation :



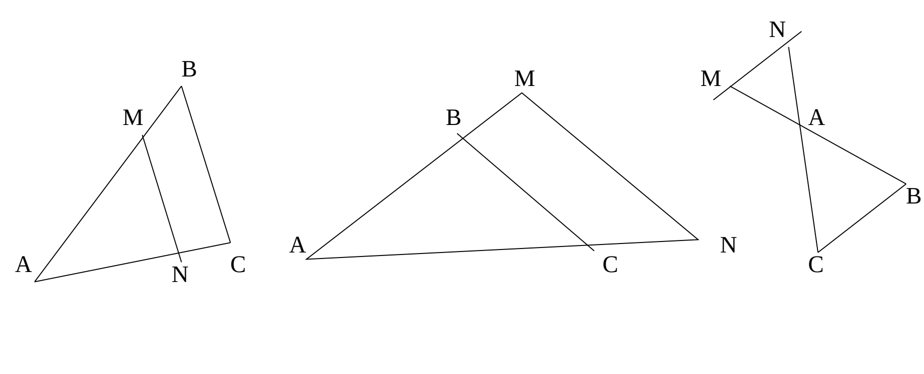
Sur la figure ci-contre, $G \in (DE)$, $H \in (DF)$ et $(HG)//(EF)$. D'après le théorème de Thalès,
$$\frac{DE}{DG} = \frac{DF}{DH} = \frac{EF}{HG}$$
Donc
$$\frac{4}{DG} = \frac{5}{6} = \frac{EF}{10}$$

De
$$\frac{4}{DG} = \frac{5}{6}$$
on déduit
$$\frac{DG}{4} = \frac{6}{5}$$
donc
$$DG = \frac{6}{5} \times 4$$
c'est à dire $DG = \frac{24}{5}$.
De
$$\frac{5}{6} = \frac{EF}{10}$$
on déduit
$$EF = \frac{5}{6} \times 10$$
c'est à dire $EF = \frac{50}{6}$ donc $EF = \frac{25}{3}$.

2 Réciproque du théorème de Thalès

Théorème :

Soient (AB) et (AC) deux droites sécantes en A. Soit M un point de la droite (AB) et N un point de la droite (AC). Si les points A, B et M d'une part, A, C et N d'autre part, sont dans le même ordre et si
$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$$
alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles.



Exemple :

Sur la figure ci-dessous, on suppose que $AU = 2$, $UB = 1$, $AS = 3$ et $SR = 1,5$.
On cherche à savoir si dans ces conditions, les droites (BR) et (SU) sont parallèles.
U appartient à (AB), S appartient à (AR) et A, U, B d'une part, A, S, R d'autre part sont dans le même ordre.
D'une part, $\frac{AU}{AB} = \frac{2}{3}$
D'autre part, $\frac{AS}{AR} = \frac{3}{4{,}5} = \frac{2}{3}$
On constate que $\frac{AU}{AB} = \frac{AS}{AR}$ donc d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (BR) et (US) sont parallèles.