Systèmes d'équations cours 3e

F.Gaudon

23 octobre 2004

Table des matières

1 Vocabulaire

Définition :

Un système d'équations de deux inconnues est constitué de deux équations ayant chacune deux inconnues.
Les solutions d'un système d'équations à deux inconnues sont les couples de nombres qui vérifient les deux équations à la fois.

Exemple :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x - y & = & 1 \\ -x + 2y & = & 4 \end{array} \right.$$

$2x - y$ est une des deux équations du système et x et y en sont les inconnues.
Résoudre ce système, c'est trouver tous les couples de nombres $(x; y)$ qui sont solutions des deux équations.

2 Méthodes de résolution algébriques

2.1 Substitution

Principe :
On exprime l'une des inconnues en fonction de l'autre l'aide d'une des équations et on reporte l'expression dans la deuxième équation.

Exemple :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x - y & = & 1 \ (1) \\ -x + 2y & = & 4 \ (2) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y & = & 2x - 1 \text{ on exprime y en fonction de x avec (1)} \\ -x + 2y & = & 4 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y & = & 2x - 1 \\ -x + 2(2x - 1) & = & 4 \text{ on reporte l'expression de y dans la deuxième équation} \end{array} \right.$$

On calcule x à l'aide de l'équation restante :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y & = & 2x - 1 \\ -x + 4x - 2 & = & 4 \end{array} \right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & 2x-1 \\ 3x-2 & = & 4 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & 2x-1 \\ 3x & = & 6 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & 2x-1 \\ x & = & 2 \end{array}\right.$$

On reporte la valeur de x trouvée pour trouver y :

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & 2\times 2-1 \\ x & = & 2 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & 3 \\ x & = & 2 \end{array}\right.$$

On vérifie ensuite que le couple trouvé convient bien :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2\times 2-3 & = & 1 \\ -2+2\times 3 & = & 4 \end{array}\right.$$

Le système admet une seule solution, le couple $(2;3)$.

2.2 Combinaison

principe :

Dans la méthode par combinaison, on multiplie l'une ou les deux équations par des nombres convenablement choisis de telle manière que l'une des inconnues disparaisse par addition membre à membre.

Exemple :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+3y & = & 5\text{(a)} \\ 5x+3y & = & 16 \text{ (b)} \end{array}\right.$$

On multiplie les deux membres de (a) par -5 et les deux membres de (b) par 2 :

$$\left\{\begin{array}{rcl} (-5)\times 2x+(-5)\times 3y & = & (-5)\times 5 \text{ (a)} \times 5 \\ 2\times 5x+2\times 3y & = & 16\times 2 \text{ (b)} \times 2 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} -10x-15y & = & -25 \\ 10x+6y & = & 32 \end{array}\right.$$

On additionne membre à membre la première et la deuxième équation :

$$10x - 10x + 6y - 15y = -25 + 32$$

donc

$$-9y = 7$$

c'est à dire

$$y = -\frac{7}{9}$$

On reporte ensuite dans l'une des équations d'origine :

$$2x + 3 \times -\frac{7}{9} = 5$$

donc

$$2x - \frac{21}{9} = 5$$

c'est à dire

$$2x = \frac{66}{9}$$

donc

$$x = \frac{33}{9}$$

ou

$$x = \frac{11}{3}$$

On vérifie ensuite :

$$\begin{cases} 2 \times \frac{11}{3} + 3 \times -\frac{7}{9} & = & 5 \\ 5 \times \frac{11}{3} + 3 \times -\frac{7}{9} & = & 16 \end{cases}$$

Le système admet une unique solution $(\frac{11}{3}; -\frac{7}{9})$.

3 Résolution graphique

Méthode :

Résoudre graphiquement un système d'équations consiste à interpréter le système à l'aide de deux fonctions affines dont les droites représentations graphiques ont pour équations les deux équations du système. La solution du système est alors le couple de coordonnées du point d'intersection des deux droites.

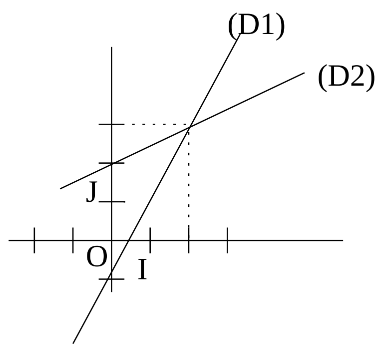
Exemple :
On considère le système d'équations suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x-y & = & 1 \\ -x+2y & = & 4 \end{array}\right.$$

qui s'écrit aussi,

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & 2x-1 \\ y & = & 0,5x+2 \end{array}\right.$$

Soit $(\mathcal{D}_\infty)$ la représentation graphique de la fonction affine f définie par $f(x) = 2x - y$ et soit (D_2) la représentation graphique de la fonction affine g définie par $g(x) = -x + 2y$.



La solution du système est le couple $(2; 3)$.