Racines carrées cours 3e

F.Gaudon

22 juillet 2004

Table des matières

1 Carrés et racines carrées

Définition :

Soit a un nombre positif, $\sqrt{a}$ (lire "racine carrée de a") est le nombre positif dont le carré est le nombre a.

Remarque :
L'écriture $\sqrt{a}$ n'a pas de sens si le nombre a est strictement négatif.

Propriété :

Pour $a \geq 0$,

$$(\sqrt{a})^2 = a$$

$$\sqrt{a^2} = a$$

Exemples de calcul de racines carrées :

– mentalement : $\sqrt{0} = 0$, $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{4} = 2$
– avec une calculatrice : 4,8 est la *valeur exacte* de $\sqrt{23,04}$, c'est donc la racine carrée de 23,04 mais 1,414213562 est une *valeur approchée* de $\sqrt{2}$, ce n'est pas la racine carrée de 2.

2 Résolution de l'équation $x^2 = a$

Propriété :

L'équation $x^2 = a$ admet :
– deux solutions $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$ si $a \geq 0$;
– une unique solution 0 si $a = 0$;
– aucune solution si $a < 0$.

Preuve :
Si $a > 0$

$$\begin{aligned} x^2 &= a \\ x^2 - a &= 0 \\ x^2 - (\sqrt{a})^2 &= 0 \\ (x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a}) &= 0 \end{aligned}$$

Un produit est nul lorsque l'un des deux facteurs est nul,
donc $x - \sqrt{a} = 0$ ou $x + \sqrt{a} = 0$
c'est à dire $x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$
Donc l'équation admet deux solutions distinctes $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.
Si $a = 0$ le même raisonnement conduit a deux solution $\sqrt{0}$ et $-\sqrt{0}$ donc une seule solution 0.
Si $a < 0$, tout carré étant positif, pour tout nombre x, x^2 est positif donc différent de a d'où pas de solution.

3 Opérations sur les racines carrées

Propriété :

Pour $a \geq 0$ et $b \geq 0$,

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$$

Pour $a \geq 0$ et $b > 0$,

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

Preuve :

$$\begin{aligned}(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 &= (\sqrt{a})^2 \times (\sqrt{b})^2 \\ &= a \times b\end{aligned}$$

donc $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ est un nombre positif qui élevé au carré donne $a \times b$.
Or $\sqrt{a \times b}$ est par définition le nombre positif dont le carré vaut $a \times b$.
Donc $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$. De même,

$$\begin{aligned}(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}})^2 &= \frac{\sqrt{a}^2}{\sqrt{b}^2} \\ &= \frac{a}{b}\end{aligned}$$

donc $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ est un nombre positif qui élevé au carré donne $\frac{a}{b}$.
Or $\sqrt{\frac{a}{b}}$ est par définition le nombre positif qui élevé au carré donne $\frac{a}{b}$.
D'où l'égalité.

Exemples :

$$A = \frac{\sqrt{12}}{2}$$
$$A = \frac{\sqrt{4 \times 3}}{2}$$
$$A = \frac{\sqrt{4} \times \sqrt{3}}{2}$$
$$A = \frac{2 \times \sqrt{3}}{2}$$
$$A = \sqrt{3}$$

$$B = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{27}}$$
$$B = \sqrt{\frac{21}{27}}$$
$$B = \sqrt{\frac{3 \times 7}{3 \times 9}}$$
$$B = \sqrt{\frac{7}{9}}$$
$$B = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{9}}$$
$$B = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$C = 5\sqrt{2} - 8\sqrt{2}$$
$$C = (5 - 8)\sqrt{2}$$
$$C = -3\sqrt{2}$$

Remarque :
En général, $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
Par exemple, $\sqrt{16+9} = 5$ mais $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 7$.