Nombres entiers et rationnels cours 3e

F.Gaudon

2 septembre 2004

Table des matières

1 Diviseurs de nombres entiers

Définition :

Soient a et b deux nombres entiers positifs. On dit que a divise b si il existe un nombre n tel que $a \times n = b$.

Définition :

Soient a et b deux nombres entiers positifs.
Un *diviseur commun* à a et b est un nombre entier qui divise à la fois a et b.

Exemple :
diviseurs de 8 : 1, 2, 4 et 8 ;
diviseurs de 12 : 1, 2, 3, 4, 6 et 12 ;
diviseurs communs de 8 et 12 : 1, 2 et 4.

Remarque :
Etant donnés deux nombres, le nombre 1 est toujours un diviseur commun de ces deux nombres.

Propriété et définition :

Deux nombres a et b entiers naturels non nuls admettent toujours au moins un diviseur commun. Le plus grand diviseur commun s'appelle le P.G.C.D. (Plus Grand Commun Diviseur) des nombres a et b. On le note $PGCD(a;b)$.

Preuve :
1 est toujours est un diviseur commun d'où l'existence d'au moins un diviseur commun. Les diviseurs communs de a et b sont inférieurs à a et b, il y en a donc un nombre fini d'où l'existence d'un plus grand diviseur commun.

Exemple :
PGCD(8 ;12)=4

Définition :

Lorsque le plus grand diviseur commun de deux nombres a et b est égal à 1, on dit que les nombres a et b sont *premiers entre eux.*

Exemple :

- 2 et 3 sont premiers entre eux ainsi que 13 et 12 ;
- 2 et 4 ne sont pas premiers entre eux car 2 est un diviseur commun à 2 et 4.

2 Application à la simplification de fractions

Définition :

Une fraction $\frac{a}{b}$ (avec $b \neq 0$) est dite irréductible lorsque a et b sont premiers entre eux.

Exemple :
$\frac{12}{8} = \frac{4\times3}{4\times2} = \frac{3}{2}$ $\frac{12}{8}$ n'est pas irréductible mais $\frac{3}{2}$ l'est.

Propriété :

Pour rendre une fraction $\frac{a}{b}$ (avec $b \neq 0$) irréductible, on la simplifie par le plus grand diviseur commun à a et b.

Preuve :
Soit d le PGCD de a et b. Il existe donc un nombre r tel que $dr = a$ et un nombre s tel que $ds = b$. On a donc

$$\frac{a}{b} = \frac{dr}{ds} = \frac{r}{s}$$

Il reste à justifier que $\frac{r}{s}$ est irréductible c'est à dire que r et s sont premiers entre eux c'est à dire encore que le plus grand diviseur commun à r et s est 1. Soit donc un diviseur n commun à r et s. Il existe donc r' tel que $r = r'n$ et il existe s' tel que $s = s'n$. D'où $a = dnr'$ et $b = dns'$ et donc dn est un diviseur commun à a et b. Comme d est le plus grand, $dn = d$ donc $n = 1$.

3 Recherche pratique du PGCD de deux nombres entiers naturels

3.1 Propriétés utiles (Hors Programme)

Propriété :
Si k est un diviseur commun aux deux nombres a et b alors il divise aussi $a-b$ et $a+b$.

Preuve :
Si k est un diviseur commun de a et b, il existe deux nombres entiers positifs n et p tels que $a = kn$ et $b = kp$ donc $a + b = kn + kp$ c'est à dire $a + b = k(n + p)$ en factoriasant par k. Cela montre que k divise aussi $a + b$. On a de même $a - b = k(n - p)$ ce qui montre que k est un diviseur de $a - b$.

Propriété :
Soient a et b deux nombres entiers avec $a > b$ et $b \neq 0$. Si r est le reste de la division euclidienne de a par b, alors $PGCD(a; b) = PGCD(b; r)$.

Preuve :
r est le reste de la division euclidienne de a par b donc il existe un nombre entier r tel que $a = bq + r$. On appelle d le PGCD de a et de b. d divise a et b donc il divise bq et a donc il divise aussi $a - bq$. Mais $a - bq = r$ donc d est un diviseur de r et b. Il reste à montrer que c'est le plus grand diviseur commun à r et b. On considère donc un diviseur commun k à r et b. Il divise donc bq et r donc c'est un diviseur de $bq + r$ et de b c'est à dire de a et de b. Comme d est le plus grand diviseur commun à a et b, $k < d$ donc d est bien le plus grand diviseur commun à b et r.

3.2 Utilisation de l'algorithme d'Euclide

On suppose que $a > b$.
étape 1 On divise a par b et on obtient le reste r ;
étape 2 si le reste r vaut 0, alors l'algorithme est terminé, PGCD(a ;b)=b ;
étape 3 si le reste r est non nul, alors on recommence à l'étape 1 avec le nombre b à la place de a et le nombre r à la place de b.

Preuve partielle :
Il existe deux entiers naturels q et r tels que $a = bq + r$ avec $r < b$ (division euclidienne). Si $r = 0$, $a = bq$ et $b = 1b$ donc b est le PGCD de a et b. Si $r \neq 0$, alors il existe q_2 et r_2 tels que $b = q_2 r + r_2$ avec $r_2 < r < b$ Si $r_2 \neq 0$, on continue le procédé. Comme les restes r sont des entiers positifs ou nuls décroissants, l'un des restes r devra être nul et i s'agit de montrer que l'avant dernier reste non nu et l'on peut montrer que d est le PGCD de a et b.

Exemple :
PGCD de 1078 et 322

division	a	b	r
$1078 = 322 \times 3 + 112$	1078	322	112
$322 = 112 \times 2 + 98$	322	112	98
$112 = 98 \times 1 + 14$	112	98	14
$98 = 14 \times 7$	98	14	0

Donc PGCD(1078 ;322)=14 ;

3.3 Utilisation de l'algorithme des différences successives

Technique :
Le PGCD de deux nombres est le même que le PGCD su plus petit et de la différence des deux.
Par différences successsives, on diminue donc les deux nombres, jusqu'à ce que la différence fasse 0

Exemple :
Calcul du PGCD de 576 et 168 :

		différences
576	168	408
408	168	240
240	168	72
168	72	96
96	72	24
72	24	48
48	24	24
24	24	0

On a PGCD(576 ;168)=PGCD(408 ;168)=...=PGCD(24 ;24)=24 donc le PGCD est la dernière différence non nulle dans les différences successives.

Preuve :
Soient a et b deux nombres avec $a > b$, il s'agit de montrer que le PGCD de a et de b est aussi le PGCD de $a - b$ et de b.
On appelle d le PGCD de a et de b. d divise a et b donc il divise $a - b$ comme on l'a vu plus haut et il divise b. Donc d est un diviseur de b et de $a - b$. Il s'agit donc de montrer que c'est le plus grand. On considère donc un autre diviseur k de $a - b$ et de b. Il divise donc b et $b + (a - b) = a$ donc c'est un diviseur de a et de b et il est donc plus petit que d qui est le PGCD de a et de b. Donc d est bien le plus grand diviseur commun à b et à $a - b$.

4 Synthèse sur les nombres

4.1 Nombres entiers naturels

0 ; 1 ; 2 ; etc.

4.2 Nombres entiers relatifs

... ; -103 ; ... ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; ...

4.3 Nombres décimaux

Définition :

Un nombre déciaml est un nombre dont l'écriture à virgule ne comporte qu'un nombre fini de chiffres après la virgule.

Exemples :
4,25 ; 12 ; 79,066 ; etc.

4.4 Nombres rationnels

Définition :

Un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'un quotient de deux nombres entiers relatifs.

Exemples :
$\frac{10}{3} \approx 3,333$; $\frac{-1}{7}$; $7 = \frac{28}{4}$

4.5 Nombres irrationnels

Définition :

$$\boxed{\text{En nombre irrationnel est un nombre qui n'est pas rationnel.}}$$

Exemple :
$\sqrt{2}$ est irrationnel.

Preuve :
Supposons que $\sqrt{2}$ est rationnel.
On donc peut trouver deux nombres entiers relatifs a et b tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$.
On peut même supposer que la fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible, c'est à dire que a et b sont premiers entre eux. Alors :

$$\frac{a}{b} = \sqrt{2}$$

donc

$$(\frac{a}{b})^2 = \sqrt{2}^2$$

d'où

$$\frac{a^2}{b^2} = 2$$

et

$$a^2 = 2b^2$$

donc 2 divise a^2. Or a^2 est un nombre pair seulement lorsque a est lui-même pair. donc 2 divise aussi a. On peut donc écrire que $a = 2r$ donc que $a^2 = 4r^2$ d'où $4r^2 = 2b^2$ et $2r^2 = b^2$. Donc 2 divise b^2 et par suite 2 divise b et 2 divise a : ce n'est pas possible puisque l'on a supposé a et b premiers entre eux. D'où l'hypothèse de départ est nécessairement fausse et $\sqrt{2}$ est don irrationnel.