Fonctions cours 3e

F.Gaudon

26 octobre 2004

Table des matières

1 Fonctions linéaires

Définition :

a désigne un nombre fixé. Le procédé f qui à tout nombre x associe le nombre ax est appelé *fonction linéaire*. On note

$$f : x \longmapsto ax$$

Le nombre ax est aussi noté $f(x)$ et appelé *image* du nombre x par la fonction linéaire f.

Exemple :
la fonction linéaire f de coefficient 4 associe au nombre 3 le nombre 3×4 c'est à dire 12. On écrit $f(3) = 12$. Elle associe au nombre $-3,1$ le nombre $-12,4$, c'est à dire $f(-3,1) = -12,4$.

2 Fonctions affines

Définition :

Soient a et b deux nombres. On définit une fonction affine f lorsqu'à chaque nombre x on associe le nombre $ax + b$.
On note $f : x \mapsto ax + b$
Le nombre $ax + b$ est appelé l'image du nombre x par la fonction f

Exemple :
$f : x \longmapsto -2x + 5$
$f(0) = -2 \times 0 + 5$
$f(0) = 5$
5 est l'image de 0 par la fonction affine f.
$f(\frac{3}{2}) = -2 \times \frac{3}{2} + 5$
$f(\frac{3}{2}) = -3 + 5$
$f(\frac{3}{2}) = 2$
2 est l'image de $\frac{3}{2}$ par la fonction affine f.

Remarque :
f est de la forme $f : x \mapsto ax$ lorsque $b = 0$.
Toute fonction linéaire est donc une fonction affine.

3 Représentation graphique de fonctions

3.1 Représentation graphique d'une fonction affine

Définition :

La représentation graphique d'une fonction f dans un repère donné est l'ensemble des points de coordonnées $(x; f(x))$.

Propriété :

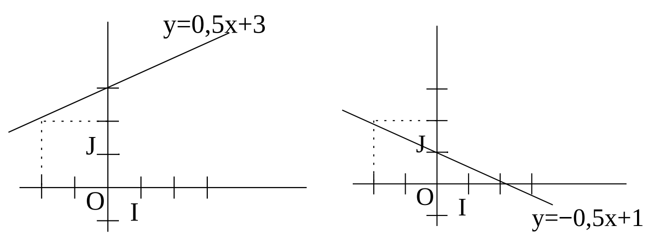
La représentation graphique de la fonction affine $f : x \mapsto ax + b$ est une droite.
Les points de cette droite sont les points dont les coordonnées $(x; y)$ vérifient l'équation $y = ax + b$.
On dit que cette droite a pour équation $y = ax + b$.

Définition :

On considère la fonction affine $f : x \mapsto ax + b$.
– Le nombre a est appelé *coefficient directeur* de la fonction affine f ;
– Le nombre b est appelé *ordonnée à l'origine* de la fonction affine f.

Exemple :
$f : x \mapsto 0,5x + 3$
Soit $(\mathcal{D}_1)$ sa représentation graphique.
$f(0) = 3$ donc $A(0; 3)$ appartient à $(\mathcal{D}_1)$.
$f(-2) = 2$ donc $B(-2; 2)$ appartient à $(\mathcal{D}_1)$.
On obtient le tableau de valeurs suivant :

x	0	1
$f(x)$	4	7



3.2 Représentation graphique d'une fonction linéaire

Propriété et définition :

> Dans un repère, la représentation graphique de la fonction linéaire de coefficient a est la droite qui passe par l'origine O du repère et par le point de coordonnées $(1; a)$. On dit que cette droite a pour *équation* $y = ax$ et que a est son *coefficient directeur*.

preuve :
la représentation graphique est formée des points de coordonnées $(x; ax)$. On admettra qu'ils sont alignés. Les points de coordonnées $(0; a \times 0)$ et $(1; a \times 1)$ c'est à dire $(0; 0)$ et $(1; a)$ sont donc sur cette droite.

4 Lien avec la proportionnalité

4.1 Fonctions linéaires et proportionnalité

Exemple :
On considère un carré de côté x cm.

– On s'intéresse d'abord à son périmètre $p(x)$.

x	3	3,5	5
$p(x)$	12	14	20

Ce tableau est un tableau de proportionnalité de coefficient 4. Le procédé p qui, à un nombre x associe le nombre $4x$ est une fonction linéaire de coefficient 4. On a $p(3) = 4$, $p(3,5) = 14$, etc.

– On s'intéresse ensuite à son aire $\mathcal{A}(x)$.

x	3	3,5	4
$\mathcal{A}(x)$	9	12,25	16

Ce tableau n'est pas un tableau de proportionnalité. $\mathcal{A}$ n'est pas une fonction linéaire.

Propriété :

> Deux grandeurs sont proportionnelles lorsque l'une est une fonction linéaire de l'autre. Le coefficient de la fonction linéaire est alors aussi un coefficient de proportionnalité.

Preuve :
Deux grandeurs x et y sont proportionnelles si les valeurs de y s'obtiennent en multipliant les valeurs de x correspondantes par un même nombre a c'est à dire si y est une fonction linéaire de coefficient a des valeurs de x.

4.2 Lien avec le calcul avec pourcentages

Propriété :

- Prendre 15% d'un nombre x revient à le multiplier par $\frac{15}{100}$,on a alors la fonction linéaire :
$$f : x \longmapsto 0,15x$$
- Augmenter de 15% un nombre x revient à le multiplier par $1,15$, on a alors la fonction linéaire :
$$g : x \longmapsto (1 + \frac{15}{100})x$$
- Diminuer un nombre x de 15% revient à le multiplier par $0,85$, on alors la fonction linéaire :
$$h : x \longmapsto (1 - \frac{15}{100})x$$

preuve :

- connu ;
- le nombre x augmente de 15% donc l'augmentation est de $\frac{15}{100}$ et par suite le nombre x devient après augmentation $x + \frac{15}{100}x = (1 + \frac{15}{100})x = 1,15x$;
- le nombre x diminue de 15% donc la diminution est de $\frac{15}{100}$ et par suite le nombre x devient $x - \frac{15}{100}x = (1 - \frac{15}{100})x = 0,85x$.

4.3 Fonctions affines et proportionnalité

Propriété :

Pour une fonction affine f définie par $f(x) = ax + b$, il y a proportionnalité entre les accroissements de x et les accroissements de $f(x)$. Plus précisément, lorsque x augmente de k, $f(x)$ augmente de ka.

Preuve :
Soit f la fonction définie par $f(x) = ax + b$.
Pour tous les nombres x et y, l'accroissement des valeurs de f vaut $f(x) - f(y)$, il sagit de justifier qu'il est proportionnel à l'accroissement $x - y$ de x à y, c'est à dire que les quotients $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ sont tous égaux

indépendamment de x et y. Or,

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(y)}{x-y} &= \frac{ax+b-(ay+b)}{x-y}\\ &= \frac{ax+b-ay-b}{x-y}\\ &= \frac{ax-ay}{x-y}\\ &= \frac{a(x-y)}{x-y}\\ &= a\end{aligned}$$

5 Détermination des fonctions linéaires et affines

5.1 Fonctions linéaires

Exemple :
Soit f la fonction linéaire telle que $f(3) = 12,6$.
f est linéaire donc de la forme $f : x \mapsto ax$ avec a à déterminer.
Or $f(3) = 12,6$ et $f(3) = a \times 3$ donc $a \times 3 = 12,6$.
D'où $a = \frac{12,6}{3}$ c'est à dire $a = 4,2$.
Donc $f : x \mapsto 4,2x$.

5.2 Fonctions affines

Propriété :

Le coefficient directeur a d'une fonction affine f telle que $f(x_A) = y_A$ et $f(x_B) = y_B$) est donné par :

$$a = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$$

Preuve :
Voir paragraphe précédent.

Exemple :

Déterminer la fonction affine f telle que $f(3) = 9$ et $f(-2) = -1$. f est une fonction affine donc de la forme $f : x \mapsto ax + b$ avec a et b deux nombres à déterminer.
On a vu que les accroissements sont proportionnels avec pour coefficient de proportionnalité a.
Donc $a = \frac{f(3)-f(-2)}{3-(-2)} = \frac{9-(-1)}{3+(+2)} = \frac{10}{5} = 2$.
En outre $f(3) = 9$ et $f(3) = 3a + b$ c'est à dire $f(3) = 3 \times 2 + b$ donc $3 \times 2 + b = 9$ c'est à dire $6 + b = 9$ ou encore $b = 3$.
f est la fonction définie par $f(x) = 2x + 3$.