Cours de Mathématiques pour la classe de 3e

F.Gaudon

31 juillet 2005

Table des matières

Chapitre 1

Nombres entiers et rationnels

1.1 Diviseurs de nombres entiers

Définition :

Soient a et b deux nombres entiers positifs. On dit que a *divise* b si il existe un nombre n tel que $a \times n = b$.

Définition :

Soient a et b deux nombres entiers positifs.
Un *diviseur commun* à a et b est un nombre entier qui divise à la fois a et b.

Exemple :
diviseurs de 8 : 1, 2, 4 et 8 ;
diviseurs de 12 : 1, 2, 3, 4, 6 et 12 ;
diviseurs communs de 8 et 12 : 1, 2 et 4.

Remarque :
Étant donnés deux nombres, le nombre 1 est toujours un diviseur commun de ces deux nombres.

Propriété et définition :

Deux nombres a et b entiers naturels non nuls admettent toujours au moins un diviseur commun. Le plus grand diviseur commun s'appelle le *P.G.C.D.* (Plus Grand Commun Diviseur) des nombres a et b. On le note $PGCD(a; b)$.

Preuve :
1 est toujours est un diviseur commun d'où l'existence d'au moins un diviseur commun. Les diviseurs communs de a et b sont inférieurs à a et b, il y en a donc un nombre fini d'où l'existence d'un plus grand diviseur commun.

Exemple :
PGCD(8 ;12)=4

Définition :

Lorsque le plus grand diviseur commun de deux nombres a et b est égal à 1, on dit que les nombres a et b sont *premiers entre eux*.

Exemple :

- 2 et 3 sont premiers entre eux ainsi que 13 et 12 ;
- 2 et 4 ne sont pas premiers entre eux car 2 est un diviseur commun à 2 et 4.

1.2 Application à la simplification de fractions

Définition :

Une fraction $\frac{a}{b}$ (avec $b \neq 0$) est dite *irréductible* lorsque a et b sont premiers entre eux.

Exemple :
$\frac{12}{8} = \frac{4\times3}{4\times2} = \frac{3}{2}$ $\frac{12}{8}$ n'est pas irréductible mais $\frac{3}{2}$ l'est.

Propriété :

Pour rendre une fraction $\frac{a}{b}$ (avec $b \neq 0$) irréductible, on la simplifie par le plus grand diviseur commun à a et b.

Preuve :
Soit d le PGCD de a et b. Il existe donc un nombre r tel que $dr = a$ et un nombre s tel que $ds = b$. On a donc

$$\frac{a}{b} = \frac{dr}{ds} = \frac{r}{s}$$

Il reste à justifier que $\frac{r}{s}$ est irréductible c'est à dire que r et s sont premiers entre eux c'est à dire encore que le plus grand diviseur commun à r et s est 1. Soit donc un diviseur n commun à r et s. Il existe donc r' tel que $r = r'n$ et il existe s' tel que $s = s'n$. D'où $a = dnr'$ et $b = dns'$ et donc dn est un diviseur commun à a et b. Comme d est le plus grand, $dn = d$ donc $n = 1$.

1.3 Recherche pratique du PGCD de deux nombres entiers naturels

1.3.1 Propriétés utiles (Hors Programme)

Propriété :
Si k est un diviseur commun aux deux nombres a et b alors il divise aussi $a - b$ et $a + b$.

Preuve :
Si k est un diviseur commun de a et b, il existe deux nombres entiers positifs n et p tels que $a = kn$ et $b = kp$ donc $a + b = kn + kp$ c'est à dire $a + b = k(n + p)$ en factorisant par k. Cela montre que k divise aussi $a + b$. On a de même $a - b = k(n - p)$ ce qui montre que k est un diviseur de $a - b$.

Propriété :
Soient a et b deux nombres entiers avec $a > b$ et $b \neq 0$. Si r est le reste de la division euclidienne de a par b, alors PGCD(a ;b)=PGCD(b ;r).

Preuve :
r est le reste de la division euclidienne de a par b donc il existe un nombre entier r tel que $a = bq + r$. On appelle d le PGCD de a et de b. d divise a et b donc il divise bq et a donc il divise aussi $a - bq$. Mais $a - bq = r$ donc d est un diviseur de r et b. Il reste à montrer que c'est le plus grand diviseur commun à r et b. On considère donc un diviseur commun k à r et b. Il divise donc bq et r donc c'est un diviseur de $bq + r$ et de b c'est à dire de a et de b. Comme d est le plus grand diviseur commun à a et b, $k < d$ donc d est bien le plus grand diviseur commun à b et r.

1.3.2 Utilisation de l'algorithme d'Euclide

On suppose que $a > b$.
étape 1 On divise a par b et on obtient le reste r ;
étape 2 si le reste r vaut 0, alors l'algorithme est terminé, PGCD(a ;b)=b ;
étape 3 si le reste r est non nul, alors on recommence à l'étape 1 avec le nombre b à la place de a et le nombre r à la place de b.

Preuve partielle :
Il existe deux entiers naturels q et r tels que $a = bq + r$ avec $r < b$ (division euclidienne). Si $r = 0$, $a = bq$ et $b = 1b$ donc b est le PGCD de a et b. Si $r \neq 0$, alors il existe q_2 et r_2 tels que $b = q_2 r + r_2$ avec $r_2 < r < b$ Si $r_2 \neq 0$, on continue le procédé. Comme les restes r sont des entiers positifs ou nuls décroissants, l'un des restes r devra être nul et i s'agit de montrer que l'avant dernier reste non nu et l'on peut montrer que d est le PGCD de a et b.

Exemple :
PGCD de 1078 et 322

division	a	b	r
$1078 = 322 \times 3 + 112$	1078	322	112
$322 = 112 \times 2 + 98$	322	112	98
$112 = 98 \times 1 + 14$	112	98	14
$98 = 14 \times 7$	98	14	0

Donc PGCD(1078 ;322)=14 ;

1.3.3 Utilisation de l'algorithme des différences successives

Technique :
Le PGCD de deux nombres est le même que le PGCD du plus petit et de la différence des deux.
Par différences successives, on diminue donc les deux nombres, jusqu'à ce que la différence fasse 0

Exemple :
Calcul du PGCD de 576 et 168 :

		différences
576	168	408
408	168	240
240	168	72
168	72	96
96	72	24
72	24	48
48	24	24
24	24	0

On a PGCD(576 ;168)=PGCD(408 ;168)=...=PGCD(24 ;24)=24 donc le PGCD est la dernière différence non nulle dans les différences successives.

Preuve :
Soient a et b deux nombres avec $a > b$, il s'agit de montrer que le PGCD de a et de b est aussi le PGCD de $a - b$ et de b.
On appelle d le PGCD de a et de b. d divise a et b donc il divise $a - b$ comme on l'a vu plus haut et il divise b. Donc d est un diviseur de b et de $a - b$. Il s'agit donc de montrer que c'est le plus grand. On considère donc un autre diviseur k de $a - b$ et de b. Il divise donc b et $b + (a - b) = a$ donc c'est un diviseur de a et de b et il est donc plus petit que d qui est le PGCD de a et de b. Donc d est bien le plus grand diviseur commun à b et à $a - b$.

1.4 Synthèse sur les nombres

1.4.1 Nombres entiers naturels

0 ; 1 ; 2 ; etc.

1.4.2 Nombres entiers relatifs

... ; -103 ; ... ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; ...

1.4.3 Nombres décimaux

Définition :

Un nombre décimal est un nombre dont l'écriture à virgule ne comporte qu'un nombre fini de chiffres après la virgule.

Exemples :
4,25 ; 12 ; 79,066 ; etc.

1.4.4 Nombres rationnels

Définition :

Un nombre *rationnel* est un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'un quotient de deux nombres entiers relatifs.

Exemples :
$\frac{10}{3} \approx 3,333$; $\frac{-1}{7}$; $7 = \frac{28}{4}$

1.4.5 Nombres irrationnels

Définition :

En nombre *irrationnel* est un nombre qui n'est pas rationnel.

Exemple :
$\sqrt{2}$ est irrationnel.

Preuve :
Supposons que $\sqrt{2}$ est rationnel.
On donc peut trouver deux nombres entiers relatifs a et b tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. On peut même supposer que la fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible, c'est à dire que a et b sont premiers entre eux. Alors :

$$\frac{a}{b} = \sqrt{2}$$

donc

$$(\frac{a}{b})^2 = \sqrt{2}^2$$

d'où

$$\frac{a^2}{b^2} = 2$$

et

$$a^2 = 2b^2$$

donc 2 divise a^2. Or a^2 est un nombre pair seulement lorsque a est lui-même pair. donc 2 divise aussi a. On peut donc écrire que $a = 2r$ donc que $a^2 = 4r^2$ d'où $4r^2 = 2b^2$ et $2r^2 = b^2$. Donc 2 divise b^2 et par suite 2 divise b et 2 divise a : ce n'est pas possible puisque l'on a supposé a et b premiers entre eux. D'où l'hypothèse de départ est nécessairement fausse et $\sqrt{2}$ est don irrationnel.

Chapitre 2

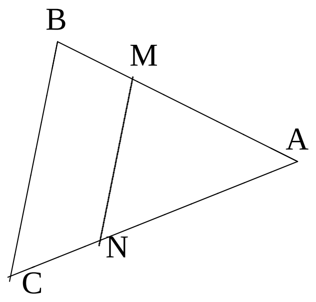
Théorème de Thalès et réciproque

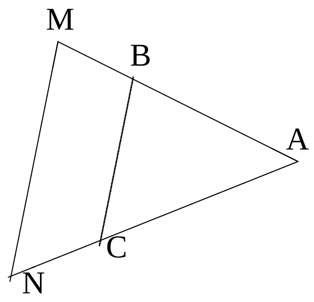
2.1 Théorème de Thalès

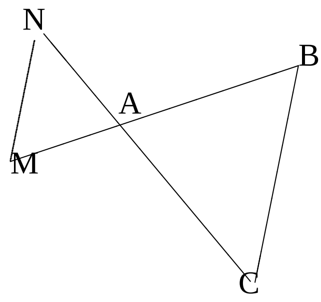
Théorème :

On considère deux droites (d) et (d') sécantes en un point A. Soit M et B deux points de la droite (d) et N et C deux points de la droite (AC). Si les droites (MN) et (BC) sont parallèles, alors les triangles AMN et ABC ont leurs côtés proportionnels. C'est à dire :

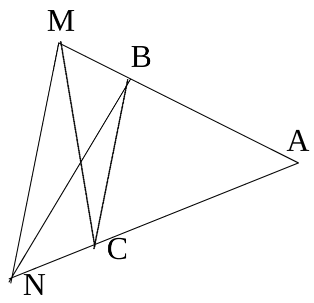
$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$







Preuve (cas particulier) :



Soit AMN un triangle avec B appartenant à [AM] et C appartenant à [AN] tels que (MN) et (BC) sont parallèles. Cette démonstration utilise systématiquement la formule de calcul de l'aire d'un triangle de base b et de hauteur associée h : $\frac{b\times h}{2}$.
Les triangles MBC et NBC ont la base [BC] commune et des hauteurs associées à [BC] de même longueur donc ils ont la même aire.
Par conséquent,

$$\frac{aire(BCM)}{aire(BCA)} = \frac{aire(BCN)}{aire(BCA)}$$

En outre, en considérant les triangles ABN et ABC, ils ont la même hauteur issue du sommet B (c'est la hauteur associée au côté [AC] dans le triangle ABC et la hauteur associée au côté [AN] dans le triangle ABN).
Par conséquent,

$$\frac{aire(BCN)}{aire(ABC)} = \frac{AN}{AC}$$

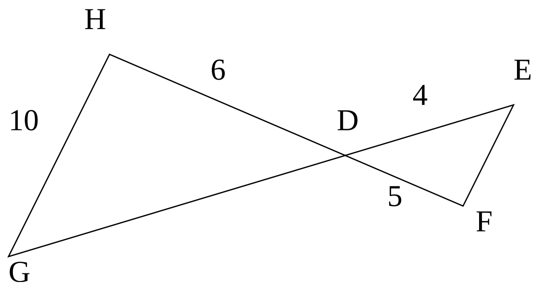
De même, en considérant les triangles ABM et ABC, on a

$$\frac{aire(BCM)}{aire(ABC)} = \frac{AM}{AB}$$

Finalement, on a donc

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$$

Exemple d'utilisation :



Sur la figure ci-contre, $G \in (DE)$, $H \in (DF)$ et $(HG)//(EF)$. D'après le théorème de Thalès,

$$\frac{DE}{DG} = \frac{DF}{DH} = \frac{EF}{HG}$$

Donc

$$\frac{4}{DG} = \frac{5}{6} = \frac{EF}{10}$$

De

$$\frac{4}{DG} = \frac{5}{6}$$

on déduit

$$\frac{DG}{4} = \frac{6}{5}$$

donc

$$DG = \frac{6}{5} \times 4$$

c'est à dire $DG = \frac{24}{5}$.

De

$$\frac{5}{6} = \frac{EF}{10}$$

on déduit

$$EF = \frac{5}{6} \times 10$$

c'est à dire $EF = \frac{50}{6}$ donc $EF = \frac{25}{3}$.

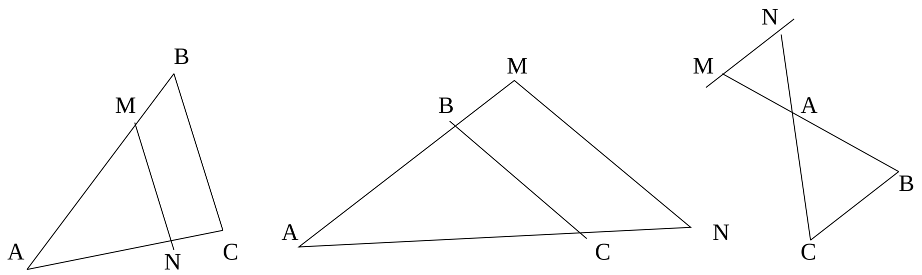
2.2 Réciproque du théorème de Thalès

Théorème :

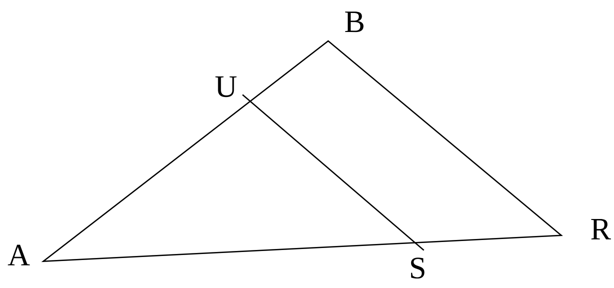
Soient (AB) et (AC) deux droites sécantes en A. Soit M un point de la droite (AB) et N un point de la droite (AC). Si les points A, B et M d'une part, A, C et N d'autre part, sont dans le même ordre et si

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$$

alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles.



Exemple :
Sur la figure ci-dessous, on suppose que $AU = 2$, $UB = 1$, $AS = 3$ et $SR = 1,5$.
On cherche à savoir si dans ces conditions, les droites (BR) et (SU) sont parallèles.
U appartient à (AB), S appartient à (AR) et A, U, B d'une part, A, S, R d'autre part sont dans le même ordre.
D'une part, $\frac{AU}{AB} = \frac{2}{3}$
D'autre part, $\frac{AS}{AR} = \frac{3}{4{,}5} = \frac{2}{3}$
On constate que $\frac{AU}{AB} = \frac{AS}{AR}$ donc d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (BR) et (US) sont parallèles.


B
U
R
A
S

Chapitre 3

Fonctions

3.1 Fonctions affines

Définition :

Soient a et b deux nombres. On appelle *fonction affine* f le procédé qui, à chaque nombre x, associe le nombre $ax + b$.
On note $f : x \mapsto ax + b$
Le nombre $ax+b$ est appelé *l'image* du nombre x par la fonction f et est noté $f(x)$ (lire "f de x").

Exemple :
On considère $f : x \longmapsto -2x + 5$

- $f(0) = -2 \times 0 + 5$
  $f(0) = 5$
  5 est l'image de 0 par la fonction affine f.
- $f(\frac{3}{2}) = -2 \times \frac{3}{2} + 5$
  $f(\frac{3}{2}) = -3 + 5$
  $f(\frac{3}{2}) = 2$
  2 est l'image de $\frac{3}{2}$ par la fonction affine f.
- Cherchons le nombre x qui a pour image 4 par la fonction f :
  On a $f(x) = 4$ donc $-2x + 5 = 4$ d'où $-2x = -1$ et $x = \frac{1}{2}$.
  Le nombre qui a pour image 4 par la fonction affine f est donc $\frac{1}{2}$, c'est à dire $f(\frac{1}{2}) = 4$.

3.2 Fonctions linéaires

Définition :

a désigne un nombre fixé.
Le procédé f qui à tout nombre x associe le nombre ax est appelé *fonction linéaire*.
On note

$$f : x \longmapsto ax$$

Le nombre ax est aussi noté $f(x)$ et appelé image du nombre x par la fonction linéaire f.
Le nombre a est appelé le *coefficient* de la fonction linéaire.

Exemple :
la fonction linéaire f de coefficient 4 associe au nombre 3 le nombre 3×4 c'est à dire 12. On écrit $f(3) = 12$.
Elle associe au nombre $-3,1$ le nombre $-12,4$, c'est à dire $f(-3,1) = -12,4$.

Remarque :
Soit f la fonction affine définie par $f : x \longmapsto ax + b$.
f est de la forme $f : x \mapsto ax$ lorsque $b = 0$.
Toute fonction linéaire est donc une fonction affine. Par contre une fonction affine n'est une fonction linéaire que si $b = 0$.

3.3 Représentation graphique de fonctions

Définition :

La *représentation graphique* d'une fonction f dans un repère donné est l'ensemble des points de coordonnées $(x; f(x))$.

Propriété :

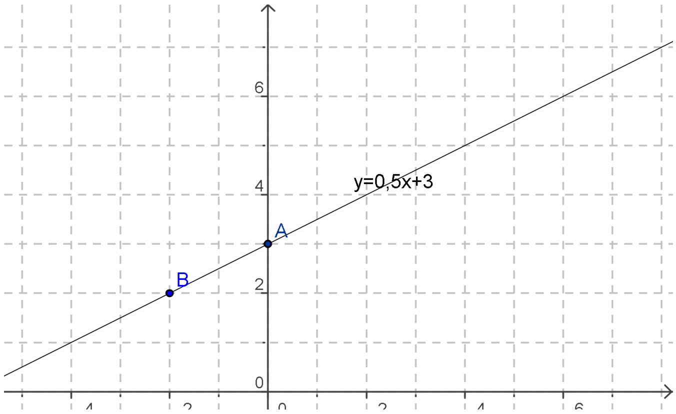
La représentation graphique de la fonction affine $f : x \mapsto ax + b$ est une droite.
Les points de cette droite sont les points dont les coordonnées $(x; y)$ vérifient l'équation $y = ax + b$.
On dit que cette droite a pour équation $y = ax + b$.

Définition :

On considère la fonction affine $f : x \mapsto ax + b$.
- Le nombre a est appelé *coefficient directeur* de la fonction affine f ;
- Le nombre b est appelé *ordonnée à l'origine* de la fonction affine f.

Exemple :
$f : x \mapsto 0,5x + 3$
Soit $(\mathcal{D}_1)$ sa représentation graphique.
$f(0) = 3$ donc $A(0; 3)$ appartient à $(\mathcal{D}_1)$.
$f(-2) = 2$ donc $B(-2; 2)$ appartient à $(\mathcal{D}_1)$.
On obtient le tableau de valeurs suivant :

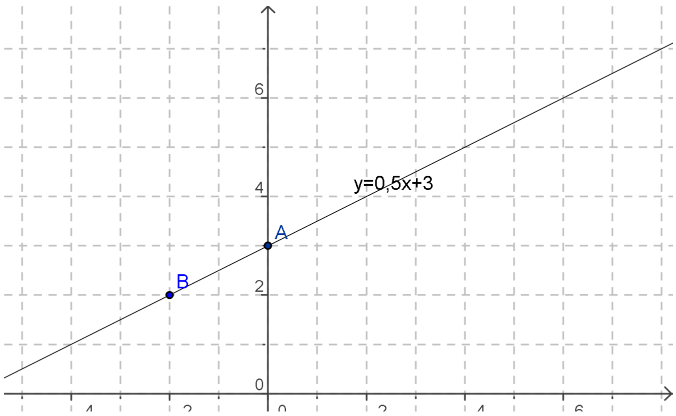
x	0	1
$f(x)$	4	7



Propriété :

Dans un repère, la représentation graphique de la fonction linéaire de coefficient a est la droite qui passe par l'origine O du repère et par le point de coordonnées $(1; a)$.

preuve :
la représentation graphique est formée des points de coordonnées $(x; ax)$. On admettra qu'ils sont alignés. Les points de coordonnées $(0; a \times 0)$ et $(1; a \times 1)$ c'est à dire $(0; 0)$ et $(1; a)$ sont donc sur cette droite.



3.4 Lien avec la proportionnalité

3.4.1 Fonctions linéaires et proportionnalité

Exemple :
On considère un carré de côté x cm.
- On s'intéresse d'abord à son périmètre $p(x)$.

x	3	3,5	5
$p(x)$	12	14	20

Ce tableau est un tableau de proportionnalité de coefficient 4.
Le procédé p qui, à un nombre x associe le nombre $4x$ est une fonction linéaire de coefficient 4.
On a $p(3) = 4$, $p(3,5) = 14$, etc.

- On s'intéresse ensuite à son aire $\mathcal{A}(x)$.

x	3	3,5	4
$\mathcal{A}(x)$	9	12,25	16

Ce tableau n'est pas un tableau de proportionnalité. $\mathcal{A}$ n'est pas une fonction linéaire.

Propriété :

Deux grandeurs sont *proportionnelles* lorsque l'une est une fonction linéaire de l'autre. Le coefficient de la fonction linéaire est alors aussi un *coefficient de proportionnalité*.

Preuve :
Deux grandeurs x et y sont proportionnelles si les valeurs de y s'obtiennent en multipliant les valeurs de x correspondantes par un même nombre a c'est à dire si y est une fonction linéaire de coefficient a des valeurs de x.

3.4.2 Lien avec le calcul avec pourcentages

Propriété :

- Prendre 15% d'un nombre x revient à le multiplier par $\frac{15}{100}$,on a alors la fonction linéaire :
$$f : x \longmapsto 0,15x$$
- Augmenter de 15% un nombre x revient à le multiplier par $1,15$, on a alors la fonction linéaire :
$$g : x \longmapsto (1 + \frac{15}{100})x$$
- Diminuer un nombre x de 15% revient à le multiplier par $0,85$, on alors la fonction linéaire :
$$h : x \longmapsto (1 - \frac{15}{100})x$$

preuve :

- connu ;
- le nombre x augmente de 15% donc l'augmentation est de $\frac{15}{100}$ et par suite le nombre x devient après augmentation $x + \frac{15}{100}x = (1 + \frac{15}{100})x = 1,15x$;
- le nombre x diminue de 15% donc la diminution est de $\frac{15}{100}$ et par suite le nombre x devient $x - \frac{15}{100}x = (1 - \frac{15}{100})x = 0,85x$.

3.4.3 Fonctions affines et proportionnalité

Propriété :

Pour une fonction affine f définie par $f(x) = ax + b$, il y a proportionnalité entre les accroissements de x et les accroissements de $f(x)$. Plus précisément, lorsque x augmente de k, $f(x)$ augmente de ka.

Preuve :
Soit f la fonction définie par $f(x) = ax + b$.
Pour tous les nombres x et y, l'accroissement des valeurs de f vaut $f(x) - f(y)$, il sagit de justifier qu'il est proportionnel à l'accroissement $x - y$ de x à y, c'est à dire que les quotients $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ sont tous égaux indépendamment de x et y.
Or,

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)-f(y)}{x-y} &= \frac{ax+b-(ay+b)}{x-y} \\
&= \frac{ax+b-ay-b}{x-y} \\
&= \frac{ax-ay}{x-y} \\
&= \frac{a(x-y)}{x-y} \\
&= a
\end{aligned}$$

3.5 Détermination des fonctions linéaires et affines

3.5.1 Fonctions linéaires

Exemple :
Soit f la fonction linéaire telle que $f(3) = 12,6$.
f est linéaire donc de la forme $f : x \mapsto ax$ avec a à déterminer.
Or $f(3) = 12,6$ et $f(3) = a \times 3$ donc $a \times 3 = 12,6$.

D'où $a = \frac{12{,}6}{3}$ c'est à dire $a = 4, 2$.
Donc $f : x \mapsto 4, 2x$.

3.5.2 Fonctions affines

Propriété :

Le coefficient directeur a d'une fonction affine f telle que $f(x_A) = y_A$ et $f(x_B) = y_B$ est donné par :

$$a = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$$

Preuve :
Voir paragraphe précédent.

Exemple :
Déterminer la fonction affine f telle que $f(3) = 9$ et $f(-2) = -1$.
f est une fonction affine donc de la forme $f : x \mapsto ax + b$ avec a et b deux nombres à déterminer.
On a vu que les accroissements sont proportionnels avec pour coefficient de proportionnalité a.
Donc $a = \frac{f(3)-f(-2)}{3-(-2)} = \frac{9-(-1)}{3+(+2)} = \frac{10}{5} = 2$.
En outre $f(3) = 9$ et $f(3) = 3a + b$ c'est à dire $f(3) = 3 \times 2 + b$ donc $3 \times 2 + b = 9$ c'est à dire $6 + b = 9$ ou encore $b = 3$.
f est la fonction définie par $f(x) = 2x + 3$.

Chapitre 4

Racines carrées

4.1 Carrés et racines carrées

Définition :

Soit a un nombre positif, $\sqrt{a}$ (lire "*racine carrée* de a") est le nombre positif dont le carré est le nombre a.

Remarque :
L'écriture $\sqrt{a}$ n'a pas de sens si le nombre a est strictement négatif.

Propriété :

Pour $a \geq 0$,

$$(\sqrt{a})^2 = a$$

$$\sqrt{a^2} = a$$

Exemples de calcul de racines carrées :
- mentalement : $\sqrt{0} = 0$, $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{4} = 2$
- avec une calculatrice : 4,8 est la *valeur exacte* de $\sqrt{23,04}$, c'est donc la racine carrée de 23,04 mais 1,414213562 est une *valeur approchée* de $\sqrt{2}$, ce n'est pas la racine carrée de 2.

4.2 Résolution de l'équation $x^2 = a$

Propriété :

L'équation $x^2 = a$ admet :
- deux solutions $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$ si $a \geq 0$;
- une unique solution 0 si $a = 0$;
- aucune solution si $a < 0$.

Preuve :
Si $a > 0$

$$\begin{aligned} x^2 &= a \\ x^2 - a &= 0 \\ x^2 - (\sqrt{a})^2 &= 0 \\ (x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a}) &= 0 \end{aligned}$$

Un produit est nul lorsque l'un des deux facteurs est nul,
donc $x - \sqrt{a} = 0$ ou $x + \sqrt{a} = 0$
c'est à dire $x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$
Donc l'équation admet deux solutions distinctes $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.
Si $a = 0$ le même raisonnement conduit a deux solution $\sqrt{0}$ et $-\sqrt{0}$ donc une seule solution 0.
Si $a < 0$, tout carré étant positif, pour tout nombre x, x^2 est positif donc différent de a d'où pas de solution.

4.3 Opérations sur les racines carrées

Propriété :

Pour $a \geq 0$ et $b \geq 0$,

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$$

Pour $a \geq 0$ et $b > 0$,

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

Preuve :

$$\begin{aligned}(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 &= (\sqrt{a})^2 \times (\sqrt{b})^2 \\ &= a \times b\end{aligned}$$

donc $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ est un nombre positif qui élevé au carré donne $a \times b$.
Or $\sqrt{a \times b}$ est par définition le nombre positif dont le carré vaut $a \times b$.
Donc $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$. De même,

$$\begin{aligned}(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}})^2 &= \frac{\sqrt{a}^2}{\sqrt{b}^2} \\ &= \frac{a}{b}\end{aligned}$$

donc $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ est un nombre positif qui élevé au carré donne $\frac{a}{b}$.
Or $\sqrt{\frac{a}{b}}$ est par définition le nombre positif qui élevé au carré donne $\frac{a}{b}$.
D'où l'égalité.

Exemples :

$$A = \frac{\sqrt{12}}{2}$$
$$A = \frac{\sqrt{4 \times 3}}{2}$$
$$A = \frac{\sqrt{4} \times \sqrt{3}}{2}$$
$$A = \frac{2 \times \sqrt{3}}{2}$$
$$A = \sqrt{3}$$

$$B = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{27}}$$
$$B = \sqrt{\frac{21}{27}}$$
$$B = \sqrt{\frac{3 \times 7}{3 \times 9}}$$
$$B = \sqrt{\frac{7}{9}}$$
$$B = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{9}}$$
$$B = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

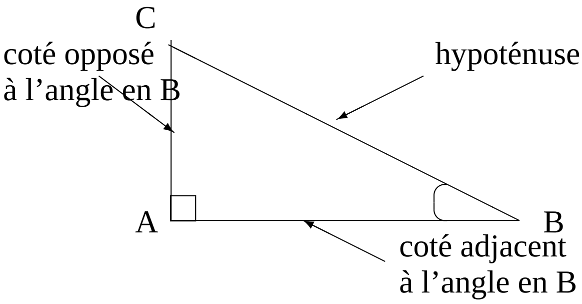
$$C = 5\sqrt{2} - 8\sqrt{2}$$
$$C = (5-8)\sqrt{2}$$
$$C = -3\sqrt{2}$$

Remarque :
En général, $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
Par exemple, $\sqrt{16+9} = 5$ mais $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 7$.

Chapitre 5

Trigonométrie

5.1 Cosinus, sinus et tangente d'un angle aigu



5.1.1 Cosinus (rappel)

Définition :

$$\cos(\widehat{ABC}) = \frac{\text{longueur du côté adjacent}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$$

5.1.2 Sinus

Définition :

On appelle *sinus* de l'angle aigu $\widehat{ABC}$, le nombre noté $\sin \widehat{ABC}$ défini par :

$$\sin(\widehat{ABC}) = \frac{\text{longueur du côté opposé}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$$

5.1.3 Tangente

Définition :

On appelle *tangente* de l'angle aigu $\widehat{ABC}$, le nombre noté $\tan \widehat{ABC}$ défini par :

$$\tan(\widehat{ABC}) = \frac{\text{longueur du côté opposé}}{\text{longueur du côté adjacent}}$$

Remarque :
Le sinus et le cosinus d'un angle aigu sont compris entre 0 et 1, ce n'est pas le cas de la tangente.

5.2 Application au calcul d'angles et de longueurs

La calculatrice doit être en mode DEGRÉS.

5.2.1 Calcul du sinus, de la tangente ou du cosinus d'un angle dont la mesure est connue

Exemple :
Calcul de $\sin(60°)$.
On tape `60 sin =` ou `sin 60 =` suivant le modèle de calculatrice.
Il s'affiche 0,86602540.
Attention ce n'est qu'une valeur approchée de $\sin(60°)$.
Arrondie à 0,01 près on a : $\sin(60°) \approx 0,87$.

5.2.2 Calcul de la mesure d'un angle

Cas où l'on connaît la mesure de l'angle

Exemple :
Calcul de l'angle x dont la tangente vaut $1,3$.
On tape `1,3` tan^{-1} `=` ou tan^{-1} `1,3 =` ou `1,3 inv tan =` ou `1,3` $\frac{1}{tan}$ `=`, etc. suivant les calculatrices.
Il s'affiche 52,43140797.
Attention, ce n'est qu'une valeur approchée.
Arrondie à 0,1 près on a : $x \approx 52,4°$.

Cas où l'on connaît deux longueurs dans un triangle rectangle

Exemple :
Soit EFG un triangle rectangle en F avec $EF = 2,6$ cm et $EG = 4$ cm.
Calcul de l'angle $\widehat{EGF}$.
Dans le triangle EFG rectangle en F, on connaît le côté opposé à l'angle et l'hypoténuse :

$$\begin{aligned}\sin \widehat{EGF} &= \frac{AB}{CB} \\ &= \frac{2,6}{4} \\ &= 0,65\end{aligned}$$

Donc l'angle $\widehat{EGF}$ mesure 40,5° environ.

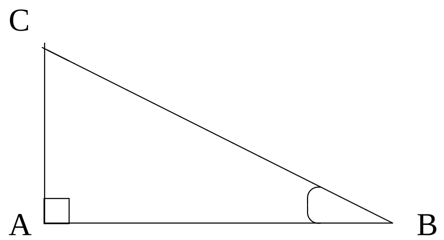
5.2.3 Calcul de longueurs

Exemple :
Soit ABD un triangle rectangle en B tel que $AB = 9$ cm et $\widehat{BAD} = 40°$.
Calcul de la longueur BD.
Dans le triangle ABD rectangle en B, on connaît l'angle $\widehat{BAD}$ et le côté adjacent, on cherche le côté opposé :

$$\begin{aligned} \tan \widehat{BAD} &= \frac{BD}{BA} \\ \tan 40° &= \frac{BD}{9} \end{aligned}$$

Donc $BD = \tan \widehat{40°} \times 9$ c'est à dire $BD \approx 7,6$ cm.

5.3 Relations trigonométriques



Propriété :

Lorsque deux angles sont complémentaires, le sinus de l'un est égal au cosinus de l'autre. C'est à dire, pour tout angle aigu x,

$$\cos(x) = \sin(90 - x) \text{ et } \sin(x) = \cos(90 - x)$$

Preuve :

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{ABC}) &= \frac{AB}{BC} \\ &= \sin(\widehat{ACB}) \\ &= \sin(90 - \widehat{ABC}) \end{aligned}$$

Propriété :

Pour tout angle aigu x,

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

où on note

$$(\cos(x))^2 = \cos^2 x$$

Preuve :

$$\begin{aligned}
\cos^2(\widehat{ABC}) + \sin^2(\widehat{ABC}) &= (\frac{AB}{BC})^2 + (\frac{AC}{BC})^2 \\
&= \frac{AB^2}{AC^2} + \frac{AC^2}{BC^2} \\
&= \frac{AB^2 + AC^2}{BC^2}
\end{aligned}$$

D'après le théorème de Pythagore dans le triangle ABC rectangle en A :
$BC^2 = AB^2 + AC^2$ Donc

$$\begin{aligned}
\cos^2(\widehat{ABC}) + \sin^2(\widehat{ABC}) &= \frac{BC^2}{BC^2} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Propriété :

Pour tout angle aigu x tel que $\cos(x) \neq 0$,

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Preuve :

$$\begin{aligned}
\tan(\widehat{ABC}) &= \frac{AC}{AB} \\
\frac{\sin(\widehat{ABC})}{\cos(\widehat{ABC})} &= \frac{\frac{AC}{BC}}{\frac{AB}{BC}} \\
&= \frac{AC}{BC} \times \frac{BC}{AB} \\
&= \frac{AC}{AB}
\end{aligned}$$

5.4 Valeurs particulières du cosinus, du sinus et de la tangente

angle	cosinus	sinus	tangente
$0°$	1	0	0
$30°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$45°$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$60°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$

5.5 Angles inscrits

Définition :

Sur un cercle $\mathcal{C}$ de centre O, on considère trois points A, B et M. L'angle $\widehat{AOB}$ est appelé *angle au centre*. On dit que l'angle $\widehat{AMB}$ est *inscrit* dans le cercle.

Propriété :

L'angle inscrit $\widehat{AMB}$ est tel que M se situe du même côté que O par rapport à la droite (AB) a, lors il a pour mesure la moitié de la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$ c'est à dire :

$$\widehat{AOB} = 2 \times \widehat{AMB}$$

Preuve :
admise

Chapitre 6

Calcul littéral

6.1 Produits et sommes

Propriétés :

$$\underbrace{k(a+b)}_{produit} = \underbrace{ka+kb}_{somme}$$
$$\underbrace{(a+b)(c+d)}_{produit} = \underbrace{ac+ad+bc+bd}_{somme}$$

Preuve :
- Distributivité admise ;
- Pour tous les nombres a, b, c et d,

$$\begin{aligned}(a+b)(c+d) &= (a+b)c+(a+b)d \text{ distributivité avec } k=(a+b)\\ &= c(a+b)+d(a+b)\\ &= ca+cb+da+db \text{ distributivité}\end{aligned}$$

Définition :

- *Développer* consiste à partir d'une expression sous forme d'une *somme* pour obtenir une expression sous forme de *produit*.
- *Factoriser* consiste à partir d'une expression sous forme d'une *somme* à partir d'une expression sous forme de *produit*.

Exemple :

$$\begin{aligned}(5+x)(3-x) &= 15+3x-5x-x^2\\ &= -x^2-2x+15\end{aligned}$$

6.2 Identités remarquables

6.2.1 Carré d'une somme

Propriété :

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

Preuve :
Pour tous les nombres a et b,

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= (a+b)(a+b) \\
&= a \times a + a \times b + b \times a + b \times b \\
&= a^2 + ab + ab + b^2 \\
&= a^2 + 2ab + b^2
\end{aligned}$$

6.2.2 Carré d'une différence

Propriété :

$$\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

Preuve :
Pour tous les nombres a et b,

$$\begin{aligned}
(a-b)^2 &= (a-b)(a-b) \\
&= a \times a + (-b) \times a + a \times (-b) + (-b) \times (-b) \\
&= a^2 - ab - ab + b^2 \\
&= a^2 - 2ab + b^2
\end{aligned}$$

6.2.3 Produit d'une somme de deux termes par leur différence

Propriété :

$$\boxed{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$$

Preuve :
Pour tous les nombres a et b,

$$\begin{aligned}
(a+b)(a-b) &= a \times a + a \times (-b) + b \times a + b \times (-b) \\
&= a^2 - ab + ab - b^2 \\
&= a^2 - b^2
\end{aligned}$$

6.2.4 Exemples

Exemples :

$$A = (3 + x)^2$$
$$A = 3^2 + 2 \times 3 \times x$$
$$A = x^2 + 6x + 9$$

$$B = (\frac{3}{2} - y)^2$$
$$B = (\frac{3}{2})^2 - 2 \times \frac{3}{2} \times y + y^2$$
$$B = \frac{3^2}{2^2} - 3y + y^2$$
$$B = \frac{9}{4} - 3y + y^2$$

$$C = (5 + 2x)(5 - 2x)$$
$$C = 5^2 - (2x)^2$$
$$C = 25 - 2^2x^2$$
$$C = 25 - 4x^2$$

Chapitre 7

Équations et inéquations

7.1 Équations du premier degré à une inconnue

7.1.1 Vocabulaire

Définition :

- Une *équation* est une égalité dans laquelle apparaît une lettre appelée *variable* ou *inconnue* souvent notée x.
- *Résoudre* une équation, c'est trouver tous les nombres x pour lesquels l'égalité est vraie. Ces nombres sont appelés les *solutions* de l'équation.

Exemple :

- L'équation suivante est du premier degré car le nombre x est élevé à la puissance 1. La seule inconnue est le nombre x.

$$\underbrace{3(x-2)}_{\text{1er membre}} = \underbrace{5x+1}_{\text{2nd membre}}$$

- L'équation

$$x^2 - 1 = 8$$

est du second degré car le nombre x est élevé à la puissance 2.

7.1.2 Méthodes de résolution

Règle de conservation des égalités :

Règle 1 : L'égalité est conservée (c'est à dire reste vraie ou fausse) lorsque l'on ajoute (ou on soustrait) le même nombre dans les deux membres de l'égalité.
Règle 2 : L'égalité est conservée lorsqu'on multiplie (ou on divise) les deux membres de l'égalité par un le même nombre non nul.

Exemple :

$$\begin{aligned}
3(x-2) &= 5x+1\\
3x-6 &= 5x+1 \text{ on développe pour supprimer les parenthèses}\\
3x-5x-6 &= 5x-5x+1 \text{ (on ajoute } -5x \text{ aux deux membres)}\\
-2x-6 &= 0x+1 \text{ (on réduit)}\\
-2x-6 &= 1 \text{ (on simplifie)}\\
-2x-6+6 &= 1+6 \text{ (on ajoute 6 aux deux membres)}\\
-2x &= 7 \text{ (on simplifie)}\\
\frac{-2x}{-2} &= \frac{7}{-2} \text{ (on divise par 6 les deux membres de l'égalité)}\\
x &= \frac{-7}{2}\\
x &= -3,5
\end{aligned}$$

vérification :
D'une part, $3 \times (-3,5-2) = 3 \times -5,5 = -16,5$ D'autre part,
$5 \times -3,5+1 = -17,5+1 = -16,5$ La solution de l'équation est donc $\frac{-7}{2}$.

7.2 Équations produit nul

7.2.1 Vocabulaire

Définition :

Une *équation produit nul* est une équation de la forme $A \times B = 0$ où A et B sont deux expressions littérales du premier degré de la même variable.

Exemple :

- $x \times (x-3) = 0$
- $(2x-1)(-x+3) = 0$

Remarque :
Une *équation produit nul* n'est pas une équation du premier degré : par exemple $(2x-1)(-x+3) = -2x^2+6x+x-3 = 2x^2+7x-3$

7.2.2 Méthode de résolution

Propriété :

Un produit est nul lorsque l'un des deux facteurs est nul.

Exemple d'application à la résolution :
$(2x-1)(-x+3)=0$ est une équation produit nul.
Le produit est nul lorsque l'un des facteurs est nul.
Donc
$2x-1=0$ ou $-x+3=0$ c'est à dire $2x=1$ ou $-x=-3$
donc $x=\frac{1}{2}$ ou $x=3$
vérification : $(2\times 0,5-1)(-0,5+3)=0$ et $(2\times 3-1)(-3+3)=0$ Les solutions de l'équation sont 0,5 et 3.

7.3 Inéquations du premier degré à une inconnue

7.3.1 Vocabulaire

Définition :

- Une *inequation*inéquation est une inégalité dans laquelle apparaît un nombre variable inconnu souvent noté x.
- Résoudre une inéquation, c'est trouver tous les nombres x pour lesquels l'inégalité est vraie.

Exemple :

$$3x-5<7+8x$$

est une inéquation.

7.3.2 Méthode de résolution

Propriété :

- L'ordre est conservé lorsque l'on ajoute (ou l'on soustrait) le même nombre aux deux membres de l'inégalité.
- L'ordre est conservé lorsque l'on multiplie (ou l'on divise) les deux membres de l'inégalité par le même nombre strictement positif.
- L'ordre est inversé lorsque l'on multiplie (ou l'on divise) les deux membres de l'inégalité par le même nombre strictement négatif.

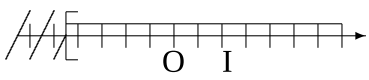
Preuve :
soient a et b deux nombres tels que $b > a$. cela revient à dire que la différence de b avec a est positive : $b - a > 0$ Soit c un autre nombre.

- Cas de l'addition : $b - a > 0$ donc $b - a + c - c > 0$ c'est à dire $b + c - c - a > 0$ ou encore $(b + c) - (a + c) > 0$ donc $b + c$ est supérieur à $a + c$.
- Cas de la soustraction : de même que l'addition.
- Cas de la multiplication : si $c > 0$ alors $c \times (b - a) > 0$ (produit de deux nombres positifs). Donc $cb - ca > 0$ en distribuant. Cela signifie que le nombre cb est supérieur au nombre ca c'est à dire $cb > ca$.
  Si $c < 0$ alors $c \times (b - a) < 0$ (produit d'un nombre positif avec un négatif). Donc $cb - ca < 0$ et donc $cb < ca$.

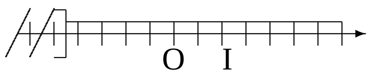
Exemple :

$$\begin{aligned}
3x - 7 &< 5 + 8x \\
3x - 7 - 8X &< 5 + 8x - 8x \text{ on enlève 8x aux deux membres} \\
-5x - 7 &< 5 \text{ on simplifie} \\
-5x - 7 + 7 &< 5 + 7 \text{ on ajoute 7 aux deux membres} \\
-5x &< 12 \text{ on simplifie} \\
\frac{-5x}{-5} &> \frac{12}{-5} \text{ on divise par -5, l'ordre est inversé} \\
x &> \frac{-12}{5} \\
x &> -2,4
\end{aligned}$$

On représente les solutions sur une droite graduée : $3x - 7 < 5 + 8x$ a pour solutions les nombres x supérieurs ou égaux à -2,4.



$3x - 7 \leq 5 + 8x$ a pour solutions les nombres x supérieurs strictement à -2,4.



Chapitre 8

Translations et vecteurs

8.1 Translations et vecteurs

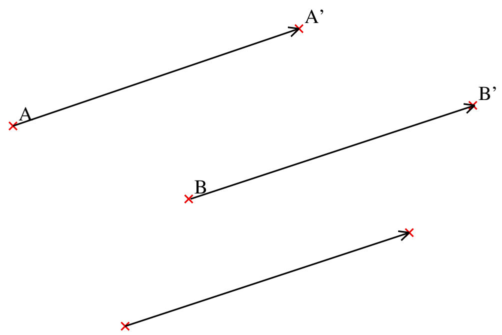
Définitions :

- On dit que deux droites ont la même *direction* lorsqu'elles sont parallèles ;
- une *direction* étant donnée par une droite (AB), il existe deux *sens* de parcours de cette droite.

Définition :

Soient deux points A et A' ainsi que la translation qui transforme A en A'. Soient des points B et C ainsi que leurs images par cette translation. On dit que les couples (A ;A'), (B ;B') et (C ;C') définissent un *vecteur*. On note $\vec{AA'}$ ou $\vec{BB'}$ ou $\vec{CC'}$ ou encore $\vec{u}$. On a donc

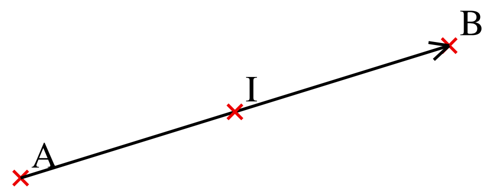
$$\vec{AA'} = \vec{BB'} = \vec{CC'} = \vec{u}$$



Remarque :
Dire que $\vec{AA'} = \vec{BB'}$ signifie donc :
- (AA') et (BB') sont parallèles, les deux vecteurs ont donc même direction ;
- les deux vecteurs ont le même sens de A vers A' ;
- ils ont la même longueur, $AA' = BB'$.

Propriété :

- Si un point I est le milieu d'un segment [AB], alors $\vec{AI} = \vec{IB}$;
- Si un point I vérifie $\vec{AI} = \vec{IB}$, alors I est le milieu du segment [AB].



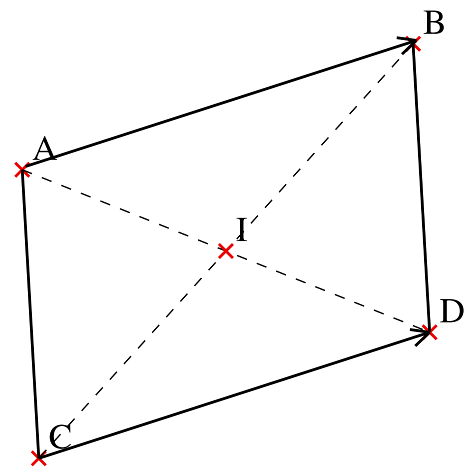
Preuve :

– Si I est le milieu de [AB] alors $AI = IB$, A, I et B étant alignés dans cet ordre, les vecteurs $\vec{AI}$ et $\vec{IB}$ ont même direction et le sens de A vers I est le même que celui de de I vers B ;
– Si $\vec{AI} = \vec{IB}$ alors $AI = IB$, les droites (AI) et (IB) sont parallèles donc confondues et les points A, I et B sont donc alignés. Ils sont alignés dans cet ordre d'après le sens des vecteurs.

8.2 Égalité vectorielle et parallélogramme

Propriété :

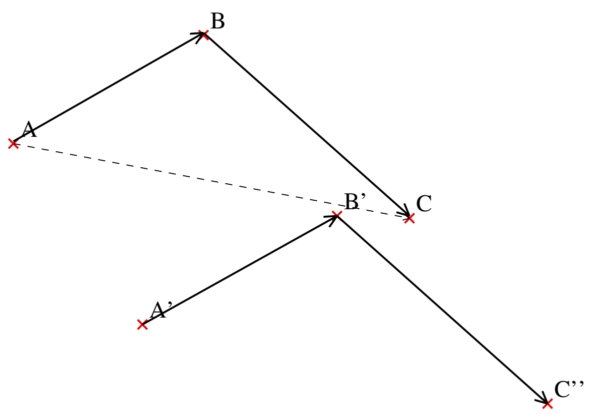
Soient quatre points A, B, C et D.
– Si $\vec{AB} = \vec{CD}$ alors le quadrilatère ABDC est un parallélogramme ;
– Si le quadrilatère ABDC est un parallélogramme, alors $\vec{AB} = \vec{CD}$.



Preuve :

- On suppose que $\vec{AB} = \vec{CD}$, alors les droites (AB) et (CD) sont parallèles et $AB = CD$. Si un quadrilatère non croisé a deux côtés opposés parallèles et de même longueur, alors c'est un parallélogramme. Donc ABDC est un parallélogramme.
- On suppose que ABDC est un parallélogramme. Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses côtés opposés sont parallèles et de même longueur. Donc $AB = CD$ et (AB) et (CD) sont parallèles. Le sens de A vers B et de C vers D étant les mêmes, on a donc $\vec{AB} = \vec{CD}$.

8.3 Somme de deux vecteurs



Propriété et définition :

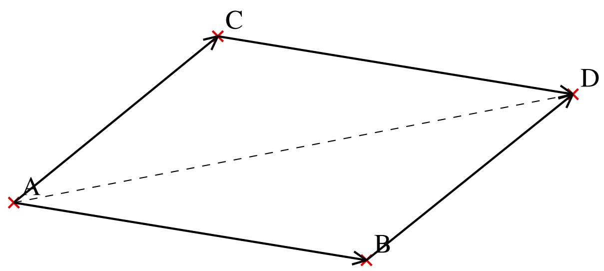
Appliquer la translation de vecteur $\vec{AB}$ puis la translation de vecteur $\vec{BC}$, revient à appliquer la translation de vecteur $\vec{AC}$. On dit que la composée de deux translations est une translation. On dit aussi que le vecteur $\vec{AC}$ est la *somme des vecteurs* $\vec{AB}$ et $\vec{BC}$. On note $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ (relation dite de *Chasles*).

Remarque :

- Le vecteur $\vec{AA}$ ou $\vec{BB}$ est appelé vecteur *nul* et noté $\vec{0}$. on a $\vec{AB} + \vec{O} = \vec{AB}$.
- Le vecteur $\vec{BA}$ est appelé le vecteur *opposé* au vecteur $\vec{AB}$ et noté $-\vec{AB}$ car $\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{0}$.

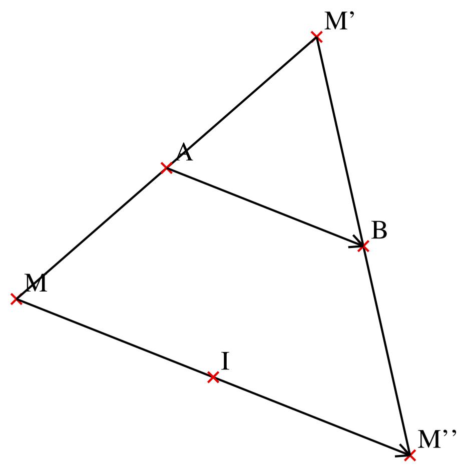
Propriété (*règle du parallélogramme*) :

Soient trois points A, B et C non alignés. Si M est un point tel que le quadrilatère ABMC est un parallélogramme, alors la somme des vecteurs $\vec{AB}+\vec{AC}$ est le vecteur $\vec{AM}$.



Preuve :
ABMC est un parallélogramme donc $\vec{AC} = \vec{BM}$. Donc
$\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BM}$ c'est à dire $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AM}$.

8.4 Composée de deux symétrie centrales



Propriété :

Soient A et B deux points. Appliquer la symétrie centrale de centre A puis la symétrie centrale de centre B revient à appliquer la translation de vecteur $\vec{u} = 2\vec{AB}$ où l'on a noté $2\vec{AB} = \vec{AB} + \vec{AB}$. On dit que la *composée* des deux symétries de centres A et B est la translation de vecteur $2\vec{AB}$.

Preuve :
Soit M un point, M' son symétrique par rapport au point A et M" le symétriques de M' par la symétrie de centre B. M et M' sont symétriques par rapport à A donc A est le milieu de [MM']. M" et M' sont symétriques par rapport à B donc B est le milieu de [M'M"]. Si dans un triangle, un segment joint les milieu de deux côtés du triangle, alors il a pour longueur la moitié du troisième côté. Donc $MM'' = 2AB$. Soit C le point tel que $\vec{AC} = 2 \times \vec{AB}$. Si dans un triangle, une droite passe par les milieux de deux côtés du triangle, alors elle est parallèle au troisième côté. Donc (MM") et (AB) sont parallèles c'est à dire (MM") et (AC) sont parallèles. Le sens de M vers M' étant le même que de A vers C, on en déduit donc que $M\vec{M}'' = \vec{AC}$ donc $M\vec{M}'' = 2\vec{AB}$.

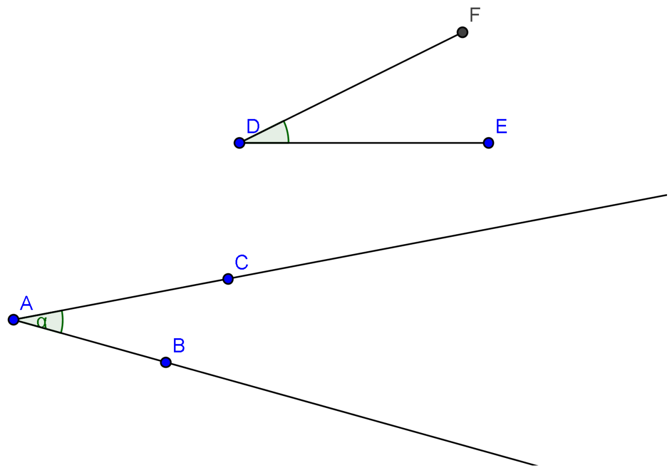
Chapitre 9

Rotations et polygones réguliers

9.1 Les rotations

Définition :

Soit O un point et α un angle. Dans la *rotation* de centre O d'angle α dans le sens direct, tout point M a pour image le point M' tel que :
- $OM = OM'$;
- $\widehat{MOM'} = \alpha$;
- la rotation a lieu dans le sens indiqué par la flèche (dans le sens des aiguilles d'une montre si cela n'est pas précisé).



Remarques :

- L'image du point O par une rotation de centre O est le point O quel que soit l'angle ;
- Une symétrie centrale est une rotation d'angle 180 ° ;
- Une rotation d'angle 90 ° est appelé un quart de tour ;
- Une rotation d'angle α dans le sens direct est une rotation d'angle $360 - \alpha$ ° dans le sens indirect.

Preuve :
Evident

Propriétés :

Les rotations conservent les longueurs, les angles, les alignements. et les aires.

9.2 Polygones réguliers

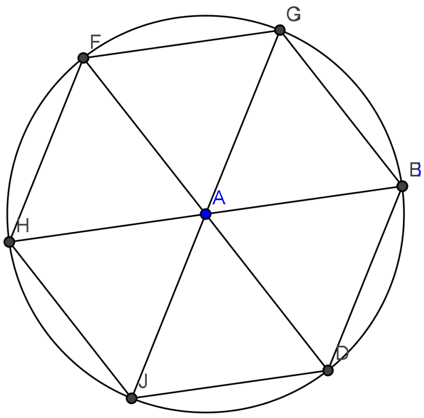
Définition :

Un *polygone régulier* est un polygone dont tous les côtés ont la même longueur et dont tous les angles sont égaux.

Propriété et définition :

Il existe un cercle passant par tous les sommets d'un polygone régulier : on l'appelle le cercle circonscrit au polygone régulier. Son centre est appelé centre du polygone régulier.

Preuve :
admise.



Propriété :

Tous les angles au centre d'un polygone régulier à n côtés ont la même mesure : $\frac{360°}{n}$.

preuve :
Soit $A_1A_2A_3...A_n$ un polygone régulier à n côtés de centre O. Puisque A_1, A_2, ..., A_{n+1} sont sur le cercle de centre O, on a $OA_1 = OA_2 = ... = OA_n$. En outre, le polygone $A_1A_2A_3...A_n$ est régulier donc les côtés A_1A_2, A_2A_3,...,$A_{n-1}A_n$ sont tous égaux. Les triangles OA_1A_2, OA_2A_3, ..., $OA_{n-1}A_n$ sont donc identiques. D'où leurs angles $\widehat{A_1OA_2}$, $\widehat{A_2OA_3}$, ..., $\widehat{A_{n-1}OA_n}$. Comme la somme de ces n angles vaut $360°$, chacun a donc pour mesure $\frac{360}{n}$.

conséquence :

Si A et B sont deux sommets consécutifs d'un polygone régulier de centre O, alors la rotation de centre O et d'angle $\widehat{AOB}$ dans un sens quelconque transforme le polygone régulier en lui-même.

Chapitre 10

Systèmes d’équations

10.1 Vocabulaire

Définition :

Un système d'équations de deux inconnues est constitué de deux équations ayant chacune deux inconnues.
Les solutions d'un système d'équations à deux inconnues sont les couples de nombres qui vérifient les deux équations à la fois.

Exemple :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x-y & = & 1 \\ -x+2y & = & 4 \end{array}\right.$$

$2x-y$ est une des deux équations du système et x et y en sont les inconnues.
Résoudre ce système, c'est trouver tous les couples de nombres $(x;y)$ qui sont solutions des deux équations.

10.2 Méthodes de résolution algébriques

10.2.1 Substitution

Principe :
On exprime l'une des inconnues en fonction de l'autre l'aide d'une des équations et on reporte l'expression dans la deuxième équation.

Exemple :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x-y & = & 1\text{ (1)} \\ -x+2y & = & 4\text{ (2)} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & 2x-1 \text{ on exprime y en fonction de x avec (1)} \\ -x+2y & = & 4 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & 2x-1 \\ -x+2(2x-1) & = & 4 \text{ on reporte l'expression de y dans la deuxième équation} \end{array}\right.$$

On calcule x à l'aide de l'équation restante :

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & 2x-1 \\ -x+4x-2 & = & 4 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & 2x-1 \\ 3x-2 & = & 4 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & 2x-1 \\ 3x & = & 6 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & 2x-1 \\ x & = & 2 \end{array}\right.$$

On reporte la valeur de x trouvée pour trouver y :

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & 2\times 2-1 \\ x & = & 2 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & 3 \\ x & = & 2 \end{array}\right.$$

On vérifie ensuite que le couple trouvé convient bien :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2\times 2-3 & = & 1 \\ -2+2\times 3 & = & 4 \end{array}\right.$$

Le système admet une seule solution, le couple $(2;3)$.

10.2.2 Combinaison

principe :

Dans la méthode par combinaison, on multiplie l'une ou les deux équations par des nombres convenablement choisis de telle manière que l'une des inconnues disparaisse par addition membre à membre.

Exemple :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+3y & = & 5\text{(a)} \\ 5x+3y & = & 16\text{ (b)} \end{array}\right.$$

On multiplie les deux membres de (a) par -5 et les deux membres de (b) par 2 :

$$\left\{\begin{array}{rcl} (-5)\times 2x+(-5)\times 3y & = & (-5)\times 5\text{ (a)}\times 5 \\ 2\times 5x+2\times 3y & = & 16\times 2\text{ (b)}\times 2 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} -10x-15y & = & -25 \\ 10x+6y & = & 32 \end{array}\right.$$

On additionne membre à membre la première et la deuxième équation :

$$10x-10x+6y-15y=-25+32$$

donc

$$-9y=7$$

c'est à dire

$$y = -\frac{7}{9}$$

On reporte ensuite dans l'une des équations d'origine :

$$2x + 3 \times -\frac{7}{9} = 5$$

donc

$$2x - \frac{21}{9} = 5$$

c'est à dire

$$2x = \frac{66}{9}$$

donc

$$x = \frac{33}{9}$$

ou

$$x = \frac{11}{3}$$

On vérifie ensuite :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2 \times \frac{11}{3} + 3 \times -\frac{7}{9} & = & 5 \\ 5 \times \frac{11}{3} + 3 \times -\frac{7}{9} & = & 16 \end{array} \right.$$

Le système admet une unique solution $(\frac{11}{3}; -\frac{7}{9})$.

10.3 Résolution graphique

Méthode :

Résoudre graphiquement un système d'équations consiste à interpréter le système à l'aide de deux fonctions affines dont les droites représentations graphiques ont pour équations les deux équations du système. La solution du système est alors le couple de coordonnées du point d'intersection des deux droites.

Exemple :

On considère le système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x - y & = & 1 \\ -x + 2y & = & 4 \end{array} \right.$$

qui s'écrit aussi,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y & = & 2x - 1 \\ y & = & 0,5x + 2 \end{array} \right.$$

Soit $(\mathcal{D}_\infty)$ la représentation graphique de la fonction affine f définie par $f(x) = 2x - y$ et soit (D_2) la représentation graphique de la fonction affine g définie par $g(x) = -x + 2y$.

La solution du système est le couple $(2; 3)$.

Chapitre 11

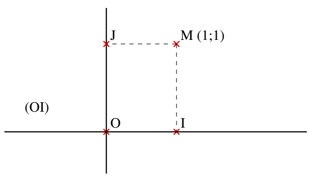
Repérage

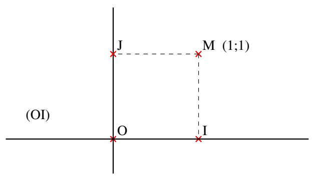
11.1 Repères du plan

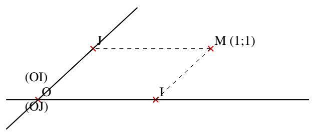
Définition :

Soient O,I et J trois points du plan.
Le *repère* (O ;I ;J) est le repère d'origine le point O, d'axes les droites (OI) et (OJ).
Son axe des abscisses a pour unité OI et l'axe des ordonnées a pour unité OJ.

– (O ;I ;J) est dit *orthogonal* si (OI) et (OJ) sont perpendiculaires :
– (O ;I ;J) est dit *orthonormal* si (OI) et (OJ) sont perpendiculaires et OI=OJ.

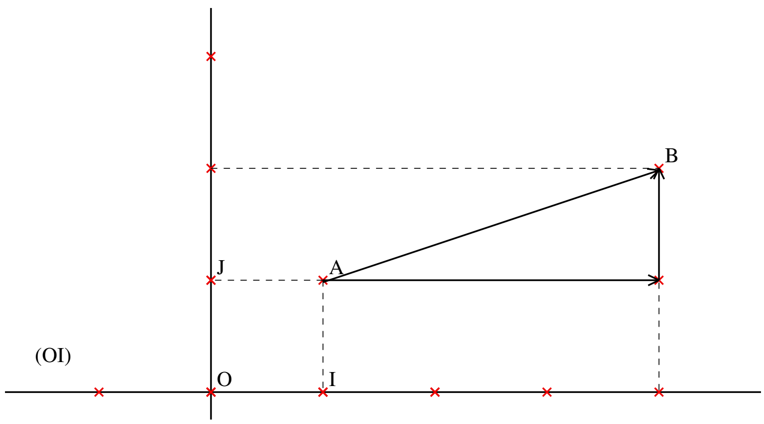






11.2 Coordonnées de vecteurs

Exemple :
Dans le repère (O ;I ;J) ci-dessous, le vecteur $\vec{u}$ est déterminé par les nombres 3 et 1 (dans cet ordre).
Ces deux nombres sont appelés les coordonnées de $\vec{u}$. On écrit $\vec{u}(3;1)$.



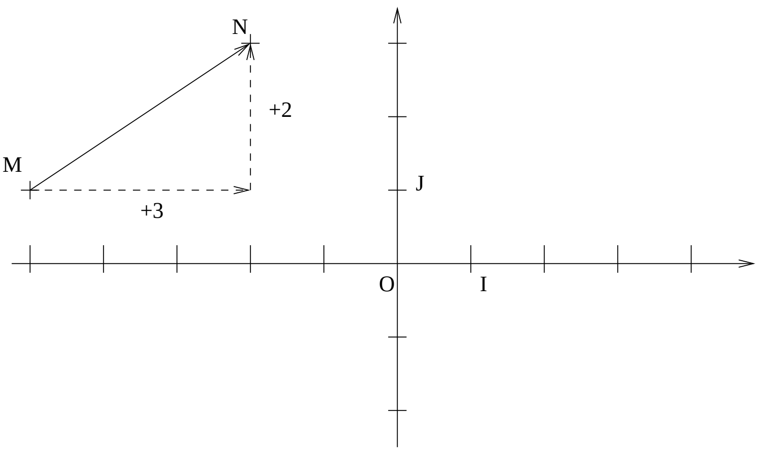
Propriété et définition :

Soit (O ;I ;J) un repère du plan. Soit $\vec{u}$ un vecteur et soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points tels que $\vec{u} = \vec{AB}$.
Soient $C(x_C; y_C)$ et $D(x_D; y_D)$ deux autres points tels que $\vec{u} = \vec{CD}$.
Alors $x_D - x_C = x_B - x_A$ et $y_D - y_C = y_B - y_A$.
On appelle *coordonnées* du vecteur $\vec{u}$ le couple de nombres $(x_B - x_A; y_B - y_A)$.

Exemple :
$M(-5; 1)$ et $N(-2; 3)$.

$$\begin{cases} x_N - x_M & = & -2 - (-5) = 3 \\ y_N - y_M & = & 3 - 1 = 2 \end{cases}$$

d'où $\vec{MN}(3; 2)$.



Preuve :
Admis.

Propriété :

- Si deux vecteurs sont égaux, alors ils ont les mêmes coordonnées :
- si deux vecteurs ont les mêmes coordonnées, alors ils sont égaux.

Preuve :
Conséquence directe de la définition.

Exemple :
Soient $M(-5; 1)$ et $R(-2; 3)$.
$x_M - x_R = (-5) - (-2) = -3$ et $y_M - y_R = 3 - 1 = 2$
d'où $\vec{RM}(3; 2)$.

11.3 Conséquences pour le calcul d'autres coordonnées

11.3.1 Coordonnées du milieu d'un segment

Propriété :

Soit (O ;I ;J) un repère. Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$. Le milieu I du segment [AB] a pour coordonnées :

$$I(\frac{x_A + y_A}{2}; \frac{x_B + y_B}{2})$$

Preuve :
I est le milieu de [AB] donc $\vec{AI} = \vec{IB}$.
Les vecteurs $\vec{AI}$ et $\vec{IB}$ sont égaux donc ils ont les mêmes coordonnées.
D'où $x_I - x_A = x_B - x_I$ et $y_I - y_A = y_B - y_I$.
Donc $x_I + x_I = x_B + x_A$ et $y_I + y_I = y_B + y_A$
c'est à dire $2x_I = x_B + x_A$ et $2y_I = y_B + y_A$
donc $x_I = \frac{x_B + x_A}{2}$ et $y_I = \frac{y_B + y_A}{2}$.

Exemple :
Soient $A(2; 4)$ et $B(-4; 1)$ et soit $I(x_I; y_I)$ le milieu de [AB].
$x_I = \frac{2+(-4)}{2}$ et $y_I = \frac{4+1}{2}$
donc $x_I = -1$ et $y_I = \frac{5}{2}$

11.3.2 Coordonnées de la somme de deux vecteurs

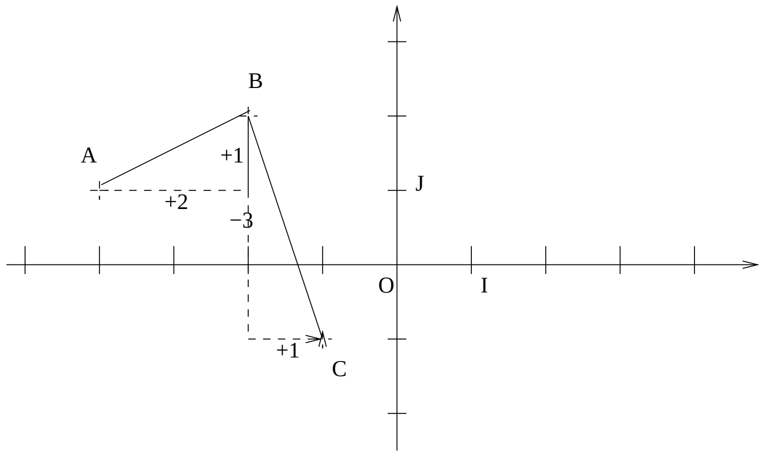
Propriété :

Soient $\vec{u}(r; s)$ et $\vec{v}(r'; s')$ deux vecteurs.
Alors le vecteur somme $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(r + r'; s + s')$.

Preuve :
Soient A et B deux points tels que $\vec{u} = \vec{AB}$.
Soit S le point tel que $\vec{v} = \vec{AS}$.
Les deux vecteurs sont égaux donc ils ont les mêmes coordonnées.
Donc $\vec{AS}(r'; s')$.
Soit M le point tel que $ABMS$ soit un parallélogramme.
D'après la règle du parallélogramme, $\vec{AB} + \vec{AS} = \vec{AM}$
Il s'agit donc de démontrer que les coordonnées de $\vec{AM}$ sont $(r + r'; s + s')$.
Soit I le point d'intersection des diagonales du parallélogramme.

Dans un parallélogramme, les diagonales se coupent en leur milieu donc I est le milieu de $[AM]$ et de $[BS]$.
D'où $x_I = \frac{x_A}{2} + \frac{x_S}{2}$ et $y_I = \frac{y_A}{2} + \frac{y_S}{2}$
mais aussi $x_I = \frac{x_B}{2} + \frac{x_M}{2}$ et $y_I = \frac{y_B}{2} + \frac{y_M}{2}$
D'où $x_A + x_S = x_B + x_M$ et $y_A + y_S = y_B + y_M$
donc $x_M - x_A = x_B - x_S$ et $y_M - y_A = y_B - y_S$
ce qui peut s'écrire aussi $x_M - x_A = x_B - x_A + x_A - x_S$ et
$y_M - y_A = y_B - y_A + y_A - y_S$
c'est à dire $x_M - x_A = r + r'$ et $y_M - y_A = s + s'$.
D'où les coordonnées du vecteur somme.

Exemple :
$\vec{AB}(2;1)$ et $\vec{BC}(1;-3)$. $\vec{AB} + \vec{BC}(3;-2)$



11.4 Distance dans un repère orthonormal

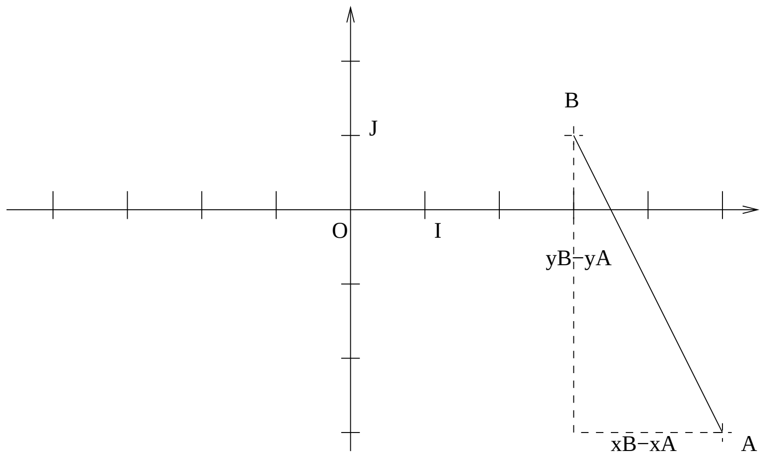
Propriété :

Soit (O ;I ;J) un repère orthonormal du plan.
Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points du plan.
Alors la distance entre A et B est donnée par :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

c'est à dire

$$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$



Preuve :
Soit $M(x_A; y_B)$. Le repère (O ;I ;J) étant orthonormal, (OI) et (OJ) sont perpendiculaires. (AM) est parallèle à (OJ). Si deux droites sont parallèles alors toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre Donc (AM) et (OI) sont perpendiculaires. Or (BM) est parallèle à (OI). Donc par la même propriété, (AM) est perpendiculaire à (BM). Dans le triangle ABM rectangle en M, d'après le théorème de Pythagore :

$$AB^2 = AM^2 + BM^2$$

Or (AM) est parallèle à (OI) donc $AM = y_B - y_A$. De même (BM) est parallèle à (OJ) donc $BM = x_B - x_A$. D'où $AB^2 = (y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2$.

Exemple :
$A(5; -3)$ et $B(3; 1)$:

$$AB^2 = (3-5)^2 + (1-(-3))^2$$
$$AB^2 = (-2)^2 + 4^2$$
$$AB^2 = 20$$

D'où $AB = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

Chapitre 12

Statistiques

12.1 Médiane d'une série statistique

Définition :

La *médiane* d'une série statistique est une valeur qui partage les valeurs de la série statistique en deux parties de même effectif. Il y a autant de valeurs supérieures ou égales à la médiane que de valeurs inférieures ou égales à la médiane.

Remarque :
Ordonner les valeurs de la série statistique dans l'ordre croissant permet de déterminer plus facilement la médiane.

Exemples :

- On considère la série avec un nombre *impair* de notes suivante : 12 ; 7 ; 14 ; 11 ; 9 ; 13 ; 7
  On ordonne les notes : 7 ; 7 ; 9 ; 11 ; 12 ; 13 ; 14
  La médiane est la 4e note c'est à dire 11.
- On considère la série avec un nombre *pair* de notes suivante : 5 ; 7 ; 15 ; 13 ; 9 ; 12 ; 15 ; 13
  On ordonne les notes : 5 ; 7 ; 9 ; 12 ; 13 ; 13 ; 15 ; 15
  La médiane est la valeur moyenne entre 12 et 13 c'est à dire 12,5.

12.2 Etendue d'une série statistique

Définition :

L'étendue d'une série statistique est la différence entre la plus grande valeur et la plus petite valeur de la série.

Exemple :
L'étendue de la série statistique du premier exemple est 14-7=7, l'étendue de la série donnée dans le deuxième exemple est 15-5=10.

Index