Nombres et équations, cours, classe de seconde

F.Gaudon

24 décembre 2023

Table des matières

1 Égalités et équations

1.1 Définitions

Définition :

- Une *égalité* est une affirmation qui utilise le signe = et qui ne peut être que *vraie* ou *fausse*.
- Une *équation* est une égalité où figure un nombre *inconnu*.
  Résoudre une équation c'est trouver toutes les valeurs possibles du nombre inconnu telles que l'égalité soit vraie : ces valeurs sont les *solutions* de l'équation.
- Deux équations qui ont les mêmes solutions sont dites *équivalentes*. Un nombre x est alors solution de l'une des deux équations *si et seulement si* il est solution de l'autre.

Exemple :
$3x - 6 = 0$ et $3x = 6$ et $x = 2$ sont trois équations équivalentes car elles ont les mêmes solutions, ici une unique solution 2. On dit aussi qu'un nombre x est solution de $3x - 6 = 0$ si et seulement si il est solution de $3x = 6$.

1.2 Règles de conservation des égalités

Propriété :

Soient a et b deux nombres.

- Soit c un nombre. $a = b$ si et seulement si $a + c = b + c$ c'est à dire qu'une égalité ne change pas d'état (donc reste vraie si elle était vraie et fausse si elle était fausse) en ajoutant (ou en soustrayant) le même nombre des deux côtés de l'égalité.
- Soit c un nombre tel que $c \neq 0$. $a = b$ si et seulement si $ac = bc$ c'est à dire qu'une égalité ne change pas d'état en multipliant (ou en divisant) par le même nombre non nul des deux côtés de l'égalité.

1.3 Résolution d'équations

Définition :

Une *équation du premier degré* est une équation qui peut s'écrire sous la forme $ax + b = 0$ avec a et b réels et x l'inconnue.

Exemple [Savoir résoudre une équation du premier degré] :
On considère l'équation $3(4 + x) = x - 6$.
Elle équivaut à $12 + 3x = x - 6$ par développement
ou encore à $12 + 2x = -6$ par addition de $-x$ des deux côtés de l'égalité
c'est à dire à $2x = -18$ par addition de -12 des deux côtés de l'égalité
ce qui équivaut enfin à $x = \frac{-18}{2}$ donc à $x = -9$.
Il y a donc une unique solution qui est -9.

Propriété :

- Pour tout réel $k > 0$, l'équation $x^2 = k$ admet deux solutions : $\sqrt{k}$ et $-\sqrt{k}$.
- Pour tout réel $k < 0$, l'équation $x^2 = k$ n'admet aucune solution réelle.
- L'équation $x^2 = 0$ admet pour unique solution 0.

Exemple [Savoir résoudre une équation se ramenant à la forme $x^2 = k$:
L'équation $3x^2 + 8 = 80$
est équivalente à $3x^2 = 72$
donc à $x^2 = \frac{72}{3}$
donc à $x^2 = 24$
D'où $x = \sqrt{24}$ ou $x = \sqrt{24}$.
L'équation a deux solutions $-\sqrt{24}$ et $\sqrt{24}$.

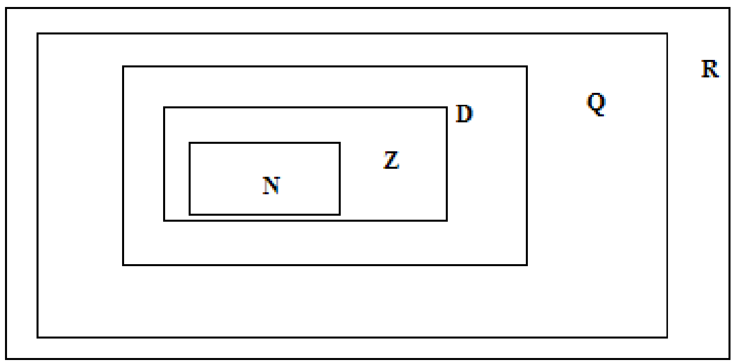
2 Ensembles de nombres

Définitions et notations :

On appelle :

- ensemble des nombres entiers *naturels*, noté $\mathbb{N}$, l'ensemble constitué des nombres 0, 1, 2,...,99, 100,101, etc. ;
- ensemble des nombres entiers *relatifs*, noté $\mathbb{Z}$, l'ensemble constitué des nombres entiers naturels et de leurs opposés (par exemple -1, -11, 99, etc.) ;
- ensemble des nombres *décimaux*, noté $\mathbb{D}$, l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme $\frac{p}{10^n}$ où p est un entier relatif et n un entier naturel c'est à dire avec une écriture à virgule comportant un nombre fini de chiffres après la virgule (par exemple $15,678 = \frac{15678}{10^3}$) ;
- ensemble des nombres *rationnels*, noté $\mathbb{Q}$, l'ensemble des quotients d'entiers relatifs c'est à dire des nombres qui peuvent s'écrire $\frac{a}{b}$ avec a et b entiers relatifs et b différent de 0.
- Ensemble des nombres *réels*, noté $\mathbb{R}$, l'ensemble des abscisses des points de toute droite graduée (par exemple 1, -3, $\sqrt{2}$, π, etc.) ;

Appellation des nombres	Définition	Notation	Exemples
Entiers naturels	Dénombrent les individus d'une population	$\mathbb{N}$	0 ; 1 ; 2 ; 3 ;... ; 99 ; 100 ; 101 ; etc.
Entiers relatifs	Entiers naturels et leurs opposés	$\mathbb{Z}$	... ;-76 ;-75 ;... -2 ;-1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 9 ; 10 ; 11 ; etc.
Nombres décimaux	de la forme $\frac{p}{10^n}$ avec p entier relatif et n entier naturel	$\mathbb{D}$	1,3 ; 4,56 ; 98,4563
Nombres rationnels	de la forme $\frac{a}{b}$ avec a et b entiers relatifs et b non nul	$\mathbb{Q}$	$\frac{1}{2}$, $\frac{4}{3}$
Nombres réels	Abscisses des points de toute droite graduée	$\mathbb{R}$	1 ; 2,3 ; $\sqrt{2}$; π ;



Propriété, définition et notation :

- Tout nombre *entier naturel* est aussi un nombre entier relatif, un nombre décimal, un nombre rationnel et un nombre réel ;
- tout nombre *entier relatif* est aussi un nombre décimal, un nombre rationnel et un nombre réel ;
- tout nombre *décimal* est aussi un nombre rationnel et un nombre réel ;
- tout nombre *rationnel* est aussi un nombre réel.

Pour traduire cette propriété, on dit que l'ensemble des entiers naturels est *inclus* dans l'ensemble des entiers relatifs, lui-même inclus dans l'ensemble des nombres décimaux. L'ensemble des nombres décimaux est lui-même inclus dans l'ensemble des nombres rationnels qui est lui aussi inclus dans l'ensemble des nombres réels. On note ainsi :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

où le symbole $A \subset B$ (lire « A inclus dans B ») signifie que tous les nombres de l'ensemble A appartiennent aussi à l'ensemble B.

Preuve :

- Si n est un nombre entier naturel, il est évidemment relatif, mais aussi décimal car il s'écrit $\frac{n}{10^0}$. Il est aussi rationnel car il s'écrit $\frac{n}{1}$.

- même raisonnement pour ce qui concerne les entiers relatifs ;
- Tout nombre décimal s'écrit $\frac{p}{10^n}$ avec p entier relatif et n entier naturel ce qui montre que c'est aussi un nombre rationnel.
- De manière évidente, les nombres rationnels sont des abscisses de points de toute droite graduée.

Exemples :

- 5 est un nombre entier naturel. Il s'écrit aussi $5,0$ donc c'est un nombre décimal et il s'écrit encore $\frac{5}{1}$ donc c'est un rationnel.
- $345,6782$ est un nombre décimal. Il s'écrit aussi $\frac{3456782}{10000}$ donc c'est un nombre rationnel.
- $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal. En effet, s'il l'était, on pourrait écrire $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}$ où a et n sont des entiers naturels.
  D'où on aurait $10^n = 3a$ par un produit en croix, ce qui impliquerait que 3 divise 10^n et donc que 3 divise 10 ce qui est absurde. Donc $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal.

Propriété et définition :

> Il existe des nombres *réels* qui ne sont pas *rationnels*. On les appelle des nombres *irrationnels*. Le nombre $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel (démonstration ci-dessous). Nous admettrons que le nombre π est un autre exemple de nombre irrationnel.

Preuve de l'irrationnalité de $\sqrt{2}$:

C'est une preuve dite « Par l'absurde » : on suppose que $\sqrt{2}$ est rationnel et on va montrer que cela mène à une absurdité.
Si $\sqrt{2}$ est rationnel, alors on peut trouver deux nombres entiers relatifs a et b tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ et tels que a et b n'ont aucun diviseur commun, c'est à dire tels que $\frac{a}{b}$ est irréductible.
D'où on aurait en élevant au carré $2 = \frac{a^2}{b^2}$ et $2b^2 = a^2$. Donc 2 diviserait a^2 et donc 2 diviserait a. On aurait donc $a = 2n$ avec n entier relatif. D'où $2b^2 = (2n)^2$ donc $b^2 = 2n^2$.
Cela signifie que 2 diviserait b^2 donc que 2 diviserait b, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse que $\frac{a}{b}$ est irréductible.
La supposition initiale est donc fausse, c'est à dire $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

La propriété suivante permet de distinguer les nombres *rationnels* des nombres *irrationnels* :

Propriété :

> Un nombre réel est *rationnel* si et seulement si il admet une écriture décimale illimitée qui est *périodique* (c'est à dire constituée d'une série de chiffres après la virgule qui se répète).

Preuve :

Admise.

Exemples :

- $\frac{19}{11} \approx 1,7272727272$ de période 72 ;
- $\sqrt{2} \approx 1,414213562$ d'écriture non périodique ;
- $\frac{3}{7} \approx 0,428571428$ de période 428571 ;
- les nombres décimaux ont évidemment une écriture décimale illimitée périodique dont la période est 0 : par exemple 3,45 s'écrit 3,450000....

3 Racine carrée d'un nombre réel positif

Définition :

Soit a un réel positif. La *racine carrée* de a est le nombre positif dont le carré vaut a. On le note $\sqrt{a}$. On a donc $\sqrt{a} \geq 0$ et $\sqrt{a}^2 = a$.

Exemples :
- $\sqrt{144} = 12$;
- $\sqrt{2}$ n'a pas de valeur décimale. Une valeur décimale approchée est $\sqrt{2} \approx 1,41$

Propriété :

Soit a un réel positif. Alors $\sqrt{a^2} = a$.

Preuve :
a est un nombre positif dont le carré vaut a^2 donc c'est la racine carrée de a^2.

Propriétés :

Soient a et b deux nombre réels positifs. Alors :
- $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$;
- si $b \neq 0$, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$;
- si n est un entier naturel, $\sqrt{a^n} = \sqrt{a}^n$.

Preuve :
- $(\sqrt{a}\sqrt{b})^2 = \sqrt{a}^2 \times \sqrt{b}^2 = ab$ donc $\sqrt{a}\sqrt{b}$ est un réel positif dont le carré est ab. Par unicité d'un tel réel, on a le résultat.
- $(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}})^2 = \frac{\sqrt{a}^2}{\sqrt{b}^2} = \frac{a}{b}$. Donc $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ est un réel positif dont le carré est $\frac{a}{b}$. Par unicité d'un tel réel, on a le résultat.
- $\sqrt{a^n} = \sqrt{a \times ... \times a} = \sqrt{a} \times .... \times \sqrt{a}$ par répétition de la première propriété.

Exemple [Savoir simplifier l'écriture d'une racine carrée] :
$\sqrt{90} = \sqrt{9 \times 10} = \sqrt{9}\sqrt{10} = 3\sqrt{10}$

4 Différentes écritures des nombres : factorisation, développement

Propriété :

Pour tous les nombres réels a, b et k :

$$k(a+b) = ka + kb$$

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

forme factorisée, produit *forme développée, somme*

Propriété :

Pour tous les nombres réels a et b on a les *identités remarquables* suivantes :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

forme factorisée, produit *forme développée, somme*

Preuve :

- $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$ par la double distributivité
- De même, $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a-b)(a+b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - bb^2$.

Exemple [Savoir développer l'expression d'un nombre] :

- Pour tout réel x, $A(x) = (2x+4)(x-5) = 2x \times x + 4x - 2x \times 5 - 20$ par la double distributivité
  Donc $A(x) = 2x^2 + 4x - 10x - 20 = 2x^2 - 6x - 20$.
- Développer $(x+3)^2 - x^2$.
  On développe $(x+3)^2$ avec l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
  $(x+3)^2 = x^2 + 2 \times 3x + 3^2 = x^2 + 6x + 9$. On réduit ensuite l'expression obtenue :
  $(x+3)^2 - x^2 = x^2 + 6x + 9 - x^2 = 6x + 9$

5 Différentes écritures des nombres : les puissances

Propriétés, règles de calcul sur les puissances :

Pour tous les réels a et b et tous les entiers naturels n et p :

- $a^n a^p = a^{n+p}$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- $\dfrac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$
- $(a^n)^p = a^{np}$
- $a^0 = 1$ et $a^1 = a$
- $(ab)^n = a^n b^n$

Définition :

La *notation scientifique* d'un nombre décimal est de la forme :

$$a \times 10^p$$

avec :

- a nombre décimal tel que $-1 < a < 1$;
- p nombre entier relatif.

Exemple :

Distance moyenne de la Terre à la Lune : 180 000 km soit $1,8 \times 10^5$ km.

6 Divisibilité dans l'ensemble des entiers naturels

6.1 Définitions

Définition :

Soient a et b deux entiers naturels avec $b \neq 0$. Dire que b est un *diviseur* de a signifie que le quotient $\frac{a}{b}$ est un entier naturel, c'est à dire que $a = bn$ avec $n \in \mathbb{N}$.
On dit alors aussi que a est un *multiple* de b ou que a est *divisible* par b.

Exemples :
3 est un diviseur de 24 car $3 \times 8 = 24$. 0 a une infinité de diviseurs.

Propriété :

Si b et c sont deux entiers naturels multiples d'un entier naturel a, alors $b+c$ est un multiple de a.

Preuve :
Si b et c sont multiples de a alors il existe deux entiers naturels k_1 et k_2 tels que $b = k_1a$ et $c = k_2a$. D'où $b + c = k_1a + k_2a = (k_1 + k_2)a$. Donc $b + c$ est un multiple de a.

Définition :

Soit n un entier naturel.
- n est un *nombre pair* s'il est divisible par 2 c'est à dire s'il existe un un entier naturel k tel que $n = 2k$;
- n est un *nombre impairs* s'il existe un entier naturel k tel que $n = 2k + 1$.

Propriétés :

- Si n est un entier pair alors n^2 est un nombre pair.
- Si n est un entier impair alors n^2 est un entier impair.

Preuve :
- En effet, si n est un entier pair alors il existe un entier naturel k tel que $n = 2k$. D'où $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ donc n^2 est pair.
- Si $n = 2k + 1$ où k est un entier naturel, alors $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ donc n^2 est impair.

Démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$:
En effet, supposons que le nombre π soit un nombre rationnel. Alors, on peut l'écrire $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ où a et b sont deux nombres entiers naturels et tels que la fraction $\frac{a}{b}$ soit irréductible. Alors on aurait $\sqrt{2}^2 = (\frac{a}{b})^2$ donc $2 = \frac{a^2}{b^2}$ et $2b^2 = a^2$. Donc a^2 serait un multiple de 2 ce qui signifierait que 2 divise a lui-même. D'où a^2 serait multiple de 4 et donc b^2 serait multiple de 2 donc b serait multiple de 2 : c'est impossible, la fraction $\frac{a}{b}$ serait alors simplifiable par 2 alors que l'on a supposé qu'elle était irréductible.

Définition :

> Un *nombre premier* est un nombre entier qui a exactement deux diviseurs : 1 et lui même.

Exemples :

- 5 est un nombre premier.
- 10 n'est pas premier car divisible par 2.
- 0 et 1 ne sont pas premiers.
- 2 est l'unique nombre premier pair.

Remarque :
Ne pas confondre un *nombre premier* avec des *nombres premiers entre eux* : deux nombres sont premiers entre eux lorsque leur seul diviseur commun est 1. Par exemple, 10 et 27 sont premiers entre eux car leur plus grand diviseur commun est 1 mais 10 n'est pas premier car divisible par 2 ou 5 et 27 n'est pas premier car divisible par 3.

6.2 Reconnaissance de nombres premiers

Propriété :

> Soit n un entier naturel non nul. Si n n'est pas premier, alors il est divisible par un *nombre premier*.

Preuve :
Si n n'est pas premier alors il admet un diviseur a_1 distinct de 1 et de n. a_1 est nécessairement strictement inférieur à n. Si a n'est pas premier, à nouveau il est divisible par un nombre a_2 strictement inférieur à a_1. Et ainsi de suite. Si aucun des nombres a_1, a_2, etc, n'était premier on pourrait construire une infinité de nombres tous distincts et de plus en plus petits et donc proche de 0 ce qui n'est pas possible car il n'y a qu'un nombre fini de nombres entre 0 et n. Par conséquent, l'un au moins des nombres a_1, a_2, etc. construit est un nombre premier et c'est en outre un diviseur de n.

Exemples :
100 n'est pas premier car divisible par 1, 100 et 10 par exemple. 2 en est un diviseur premier. 12 n'est pas premier, il est divisible par 2 qui est premier.

Propriété :

> Soit n un entier naturel non nul. Si aucun nombre entier naturel différent de 1 et inférieur strictement à $\sqrt{n}$ n'est un diviseur de n, alors n est un *nombre premier*.

Preuve :
Supposons que n ne soit pas premier. Alors il existe a et b entiers naturels différents de 1 et n tels que $n = ab$. On peut supposer que $a \leq b$. Alors $ab \geq a^2$ et donc $n \geq a^2$ donc $\sqrt{n} \geq a$. Par conséquent, n admet un diviseur plus petit que $\sqrt{n}$. Par suite, on en déduit que si n n'admet aucun diviseur strictement inférieur à $\sqrt{n}$ alors n est premier.

Exemple [Savoir reconnaître si un nombre est premier] :
On considère le nombre 101.

$\sqrt{101} \approx 10$.

2, 3 et 5 ne sont pas des diviseurs de 101 de manière évidente (critères de divisibilité). $101 \div 7 \approx 14,4$ Par conséquent, 101 est premier.