Fonctions affines, cours, classe de 2nde

1 Vocabulaire et représentation graphique

Définition :

Soient m et p deux nombres réels. On appelle fonction *affine* la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

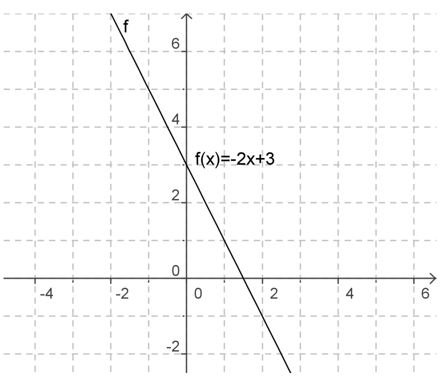
$$f(x) = mx + p$$

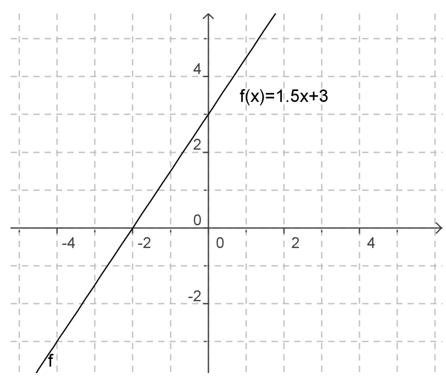
Remarque :
Si $p = 0$, f est définie par $f(x) = mx$ et est dite *linéaire*.

Représentation graphique :

La représentation graphique de toute fonction affine est une droite.
Un point $M(x; y)$ appartient à la droite si et seulement si x et y sont solutions de l'équation $y = mx + p$. $y = mx + p$ est appelée *équation réduite de la droite* représentant f.

Exemple :
Représentation graphique de $f : x \mapsto -2x + 3$.
On obtient les coordonnées de deux points de la droite :
Pour $x = 0$, $y = -2 \times 0 + 3 = 3$ donc $A(0; 3)$ appartient à la représentation graphique de la fonction f.
Pour $x = 3$, $y = -2 \times 3 + 3 = -3$ donc $B(3; -3)$ appartient à la représentation graphique de la fonction f.





Définitions et propriété :

On considère l'équation de droite $y = mx + p$ où m et p sont deux réels représentant la fonction affine f définie par $f(x) = mx + p$.

- m est appelé *pente* ou *coefficient directeur* de la droite ;
- On a $p = f(0)$.
  p est donc appelé *ordonnée à l'origine* de la droite.

2 Proportionnalité des accroissements

Propriété :

Soit une fonction affine f définie par $f(x) = mx + p$ de représentation graphique (d) dans un repère du plan. Alors l'accroissement de la variable x est proportionnel à l'accroissement des images $f(x)$ et le coefficient de proportionnalité est la pente m de la fonction affine c'est à dire que pour tous les points A et B de la droite (d) de coordonnées $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$ avec $x_A \neq x_B$ on a :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

ou encore

$$m = \frac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A}$$

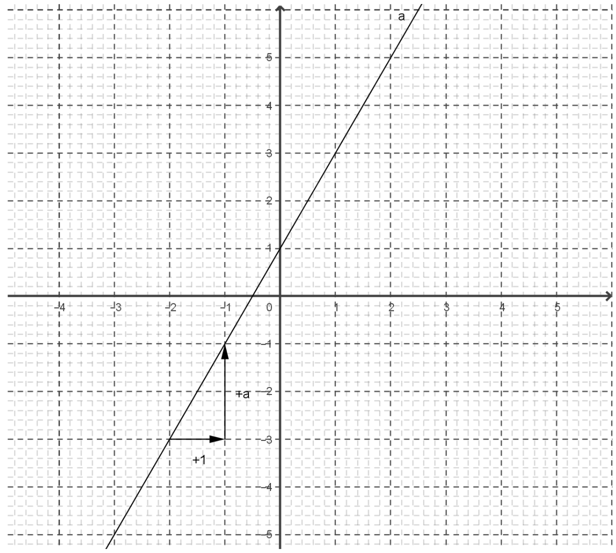
Preuve :

On a $y_B - y_A = f(x_B) - f(x_A) = mx_B + p - (mx_A + p) = mx_B - mx_A + p - p = m(x_B - x_A)$.

D'où la proportionnalité entre les accroissements des x et des $f(x)$ et la première formule.

Exemples d'utilisations :

- **[Savoir déterminer l'expression algébrique d'une fonction affine connaissant deux points de sa représentation graphique]**
  Soit f une fonction affine telle que $f(-1) = 3,5$ et $f(4) = 1$.
  f est affine donc de la forme $f(x) = ax+b$ pour tout x réel où a et b sont deux nombres réels à déterminer et $A(-1; 3,5)$ et $B(4; 1)$ sont deux points de la droite représentant f.
  On $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1-3,5}{4-(-1)} = \frac{-2,5}{5} = -0,5$.
  Donc $f(x)$ s'écrit $f(x) = -0,5x + b$ pour tout réel x.
  En outre on sait que $B(4; 1)$ appartient à la droite donc $1 = -0,5 \times 4 + b$ (on aurait tout aussi bien pu utiliser le point B) d'où $1 = -2 + b$ et $b = 1 + 2$ donc $b = 3$.
  Finalement, $f(x) = -0,5x + 3$.
- **[Savoir tracer la représentation graphique d'une fonction affine en utilisant les coefficients a et b]**
  Soit f la fonction affine dont la droite $\mathcal{D}$ qui la représente dans un repère passe par le point A de coordonnées $(-2; -3)$ et dont le nombre a dans l'écriture $f(x) = ax + b$ vaut $a = 2$. Alors si on avance de 1 unité en abscisse (autrement dit si $x_B - x_A = 1$), pour retrouver un point de la droite $\mathcal{D}$ on doit augmenter de 2 en ordonnées pour retrouver un point B de la droite $(y_B - y_A = 2)$.



3 Variations et étude de signes

Variations :

Définition et propriété :

- Si $m > 0$ alors, lorsque les valeurs de x augmentent, les valeurs de $f(x)$ augmentent. On dit que la fonction f est *strictement croissante* sur $]-\infty;+\infty[$;
- si $m = 0$ alors la fonction f est *constante* sur $\mathbb{R}$;
- si $m < 0$ alors, lorsque les valeurs de x augmentent, les valeurs de $f(x)$ diminuent. On dit que la fonction f est *strictement décroissante* sur $]-\infty;+\infty[$.

Exemple [Savoir reconnaître les variations d'une fonction affine dont l'écriture algébrique est donnée] :
On considère la fonction f définie par $f(x) = 3 - 2x$.
$f(x) = 3 + (-2x) = -2x + 3$ donc $m = -2$.
Comme $m < 0$, la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty;+\infty[$.

Signe

Si $m \neq 0$, les deux cas possibles sont résumés dans les tableaux de signe suivants :

si $m > 0$:

x	$-\infty$		$-\frac{p}{m}$		$+\infty$
signe de $mx+p$		-	0	+	

si $m < 0$:

x	$-\infty$		$-\frac{p}{m}$		$+\infty$
signe de $mx+p$		+	0	-	

Preuve du cas où $m > 0$:
$f(x) > 0$ si et seulement si $mx + p > 0$
c'est à dire $mx > -p$ ou encore
et, si $m > 0$, cela équivaut encore à $x > -\frac{p}{m}$.
Donc quand $x > -\frac{p}{m}$, on a $f(x) > 0$
et quand $x < -\frac{p}{m}$, on a $f(x) < 0$
D'où le tableau de signe dans le cas où $m > 0$.

Exemple [Savoir dresser le tableau de signe d'une fonction affine] :
Soit f la fonction définie par $f(x) = -2x + 3$.

- On résout l'équation $f(x) = 0$ pour savoir pour quelle valeur de x, $f(x)$ s'annule :
  $f(x) = 0$ équivaut à $-2x+3 = 0$ c'est à dire à $-2x = -3$ donc $x = \frac{-3}{-2}$ ou encore $x = \frac{3}{2}$.

- Comme $m = -2$, $m < 0$ donc d'après la propriété précédente, le signe est dans l'ordre $+$ 0 - dans le tableau de signes :

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	-	