

Étude de variations et de signes de fonctions, classe de seconde

F.Gaudon

13 mai 2023

Table des matières

1	Propriétés sur les inégalités (rappel)	2
2	Variations de fonctions, définition et étude graphique	3
3	Exemples d'étude algébrique de maximum ou de minimum	4

1 Propriétés sur les inégalités (rappel)

Propriété :

Soient a et b deux nombres réels, alors :

- $a \leq b$ si et seulement si $a - b$ est négatif;
- $a \geq b$ si et seulement si $a - b$ est positif.

Propriétés :

Soient a, b, c trois nombres réels :

- si $a \leq b$ alors $a + c \leq b + c$,
c'est à dire que *le sens de l'inégalité ne change pas* lorsque l'on *ajoute le même nombre* dans les deux membres ;
- si $a \leq b$ et $c > 0$ alors $ac \leq bc$,
c'est à dire que *le sens de l'inégalité ne change pas* lorsque l'on *multiplie les deux membres* de l'inégalité par un *même nombre strictement positif*;
- si $a \leq b$ et $c < 0$ alors $ac \geq bc$,
c'est à dire que le sens de l'inégalité change lorsque l'on *multiplie les deux membres* de l'inégalité par le *même nombre strictement négatif*.

Preuve :

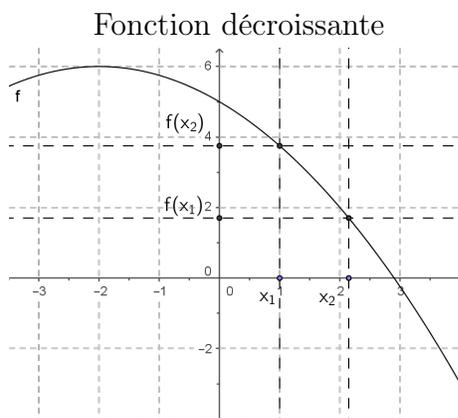
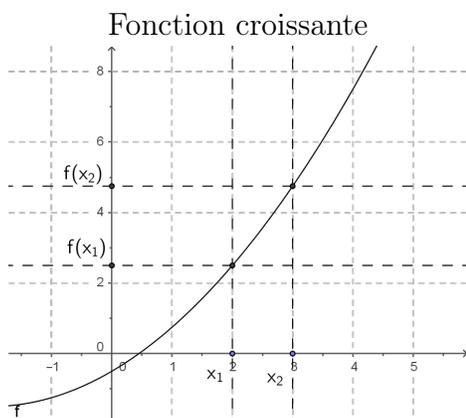
- si $a \leq b$ alors $a - b \leq 0$ c'est à dire $a + c - c - b \leq 0$ donc $a + c - (b + c) \leq 0$ c'est à dire $a + c \leq b + c$;
- si $a \leq b$ et $c > 0$ alors $a - b \leq 0$ et $c(a - b) \leq 0$ donc $ca - cb \leq 0$ c'est à dire $ac \leq bc$.
- si $a \leq b$ et $c < 0$ alors $a - b \leq 0$ et $c(a - b) \geq 0$ donc $ca - cb \geq 0$ c'est à dire $ac \geq bc$.

2 Variations de fonctions, définition et étude graphique

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

- La fonction f est dite **croissante** sur l'intervalle I lorsque pour tous x_1 et x_2 réels appartenant à I , si $x_1 \leq x_2$ alors $f(x_1) \leq f(x_2)$, c'est à dire que f **ne change pas** l'ordre des inégalités.
- La fonction f est dite **décroissante** sur l'intervalle I lorsque pour tous x_1 et x_2 réels appartenant à I , si $x_1 \leq x_2$ alors $f(x_1) \geq f(x_2)$, c'est à dire que f **change** l'ordre des inégalités.
- La fonction f est dite **monotone** sur l'intervalle I lorsqu'elle est croissante sur I , ou lorsqu'elle est décroissante sur I .



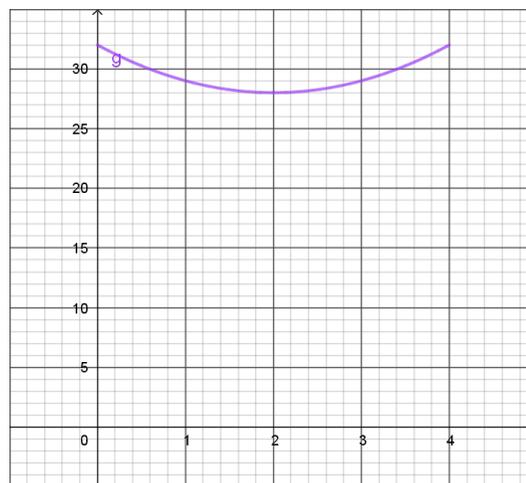
Synthèse :

Pour résumer les variations d'une fonction f on utilise un **tableau de variations** dans lequel apparaissent les intervalles sur lesquels la fonction est monotone.

Exemple [Dresser le tableau de variations d'une fonction par lecture graphique] :

On considère la fonction g ci-contre.
La fonction semble, d'après la représentation graphique, admettre le tableau de variation suivant :

x	0	2	4
$g(x)$	32	28	32



Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Soit x_0 un réel de l'intervalle I .

- La fonction f admet un *maximum* M en x_0 sur l'intervalle I lorsque :
 - ▶ $M = f(x_0)$;
 - ▶ pour tout nombre x de I $f(x) \leq M$.
- La fonction f admet un *minimum* m en x_0 sur l'intervalle I lorsque :
 - ▶ $m = f(x_0)$;
 - ▶ pour tout nombre x de I $f(x) \geq m$.
- On dit que la fonction f admet un *extremum* sur I si elle admet un maximum ou un minimum.

Exemple :

La fonction g précédente semble admettre 28 comme minimum et 64 comme maximum.

3 Exemples d'étude algébrique de maximum ou de minimum

Exemple [Savoir démontrer que l'on a un minimum ou un maximum sur un intervalle] :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; 10]$ par $f(x) = -3x^2 + 2$.

Montrons que 2 est un maximum pour la fonction f sur $[0; 10]$.

On a d'abord $f(0) = 2$.

En outre, pour tout réel x de l'intervalle, $f(x) - 2 = -3x^2 + 2 - 2 = -3x^2$.

Or si x est positif, alors $-3x^2$ est négatif.

Donc $f(x) - 2 \leq 0$.

Ce qui montre que $f(x) \leq 2$.

D'où 2 est un maximum pour la fonction f sur l'intervalle $[0; 10]$.