Vecteurs, cours pour la classe de seconde

F.Gaudon

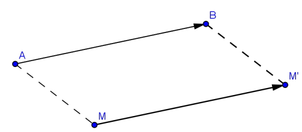
13 octobre 2023

Table des matières

1 Notion de vecteur

Propriété et définition :

Soit A et B deux points du plan. À tout point M du plan on associe le point M' tel $ABM'M$ est un parallélogramme (éventuellement aplati). M' est *l'image* de M par la *translation* qui amène A en B. On dit alors que M' est l'image de M par la *translation de vecteur* $\vec{AB}$. On dit aussi que $\vec{MM'}$ et $\vec{AB}$ sont deux *vecteurs égaux* et on note $\vec{AB} = \vec{MM'}$. On notera aussi $\vec{u}$ tout vecteur tel que $\vec{u} = \vec{AB} = \vec{MM'}$.



Définition :

Deux vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{A'B'}$ sont donc égaux si et seulement si les trois conditions suivantes sont vraies :

- les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles : on dit qu'elles ont la même *direction* ;
- le *sens* de A vers B est le même que de A' vers B' ;
- les segments $[AB]$ et $[A'B']$ ont même longueur : on dit qu'ils ont la même *norme* et on note $\|\vec{AB}\| = \|\vec{A'B'}\|$.

Propriété :

Soit A, B, C et D quatre points du plan non alignés. $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\vec{AB} = \vec{DC}$.

Définition :

Soit A et B deux points du plan. On appelle :

- *vecteur opposé* au vecteur $\vec{AB}$ le vecteur $\vec{BA}$. On note $-\vec{AB} = \vec{BA}$.
- *vecteur nul*, le vecteur $\vec{AA}$ ou $\vec{BB}$. On note $\vec{AA} = \vec{BB} = \vec{0}$.

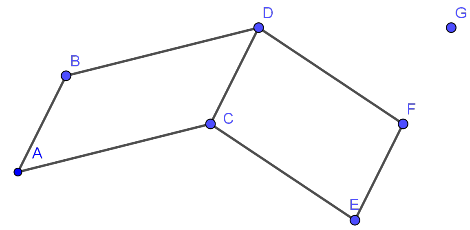
Propriété :

Soit A, B et M trois points. M est le milieu de $[AB]$ si et seulement si $\vec{AM} = \vec{MB}$.

Exemple :

Dans la figure ci-contre, $ABDC$ et $CDFE$ sont des parallélogrammes. F est le milieu de $[EG]$. Montrons que $ABFE$ est un parallélogramme puis que $\vec{AB} = \vec{FG}$.

- $ABDC$ est un parallélogramme donc $\vec{AB} = \vec{CD}$. $CDFE$ est un parallélogramme donc $\vec{CD} = \vec{EF}$. D'où $\vec{AB} = \vec{EF}$ donc $ABFE$ est un parallélogramme.
- F est le milieu de $[EG]$ donc $\vec{EF} = \vec{EG}$. D'où $\vec{AB} = \vec{EG}$ d'après la première démonstration.



2 Somme de vecteurs

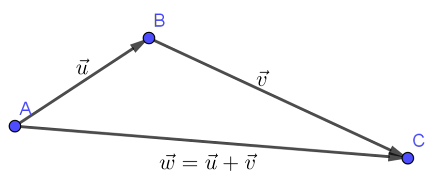
2.1 Relation de Chasles

Définition :

> Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et A, B et C trois points tels que $\vec{u} = \vec{AB}$ et $\vec{v} = \vec{BC}$.
> La *somme des vecteurs* $\vec{u}$ et $\vec{v}$, notée $\vec{u} + \vec{v}$, est le vecteur $\vec{AC}$ résultant de l'enchaînement des translations de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Propriété (relation de CHASLES) :

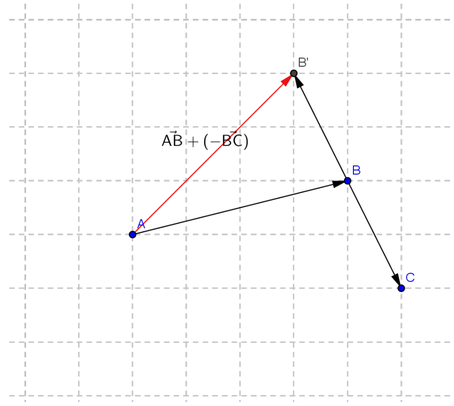
> Pour tous les points A, B et C on a donc $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$.



2.2 Différence de deux vecteurs

Définition :

> Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs. On appelle *différence* du vecteur $\vec{u}$ par le vecteur $\vec{v}$ le vecteur noté $\vec{u} - \vec{v}$ égale à $\vec{u} + (-\vec{v})$.



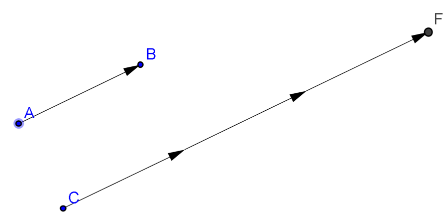
Exemple [Savoir simplifier l'expression d'un vecteur] :
Soient A, B et C trois points du plan.
Alors $\vec{u} = \vec{AB} - \vec{AC} + \vec{BC} = \vec{AB} + \vec{CA} + \vec{BC}$ d'après la définition de vecteurs opposés.
D'où $\vec{u} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA}$
Donc $\vec{u} = \vec{AC} + \vec{CA}$ d'après la relation de Chasles
et $\vec{u} = \vec{AA} = \vec{0}$ d'après la relation de Chasles à nouveau.
Avoir simplifié cette expression permet par exemple de placer simplement le point M tel que $\vec{AM} = \vec{u}$.

2.3 Produit d'un vecteur par un nombre réel

Définition :

Soient $\vec{u}$ un vecteur, k un nombre réel et A et B deux points tels que $\vec{u} = \vec{AB}$ On note $k\vec{u}$ le vecteur tel que :
- de même direction que $\vec{u}$;
- de norme kAB si $k > 0$ et $-kAB$ sinon ;
- de même sens que $\vec{u}$ si $k > 0$ et de sens opposé si $k < 0$.

Exemple :
Ci-contre, $\vec{CF} = 3\vec{AB}$ et $\vec{FC} = -3\vec{AB}$.

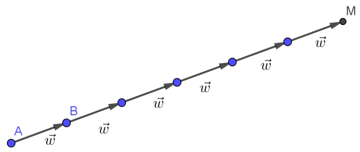


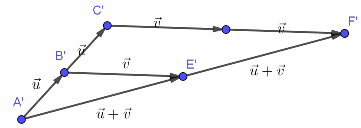
Propriétés :

Soient k, k' deux nombres réels et $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs.
- $(-1)\vec{u} = -\vec{u}$
- $k\vec{u} + k'\vec{u} = (k + k')\vec{u}$
- $k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$
- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
- $k\vec{u} = \vec{0}$ si et seulement si $k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$

Preuves :
admises

Exemples :
Ci-dessous, $\vec{AM} = 3\vec{w} + 3\vec{w} = 4\vec{w} + 2\vec{w} = 6\vec{w}$.
On a en outre, $\vec{AM} = (2 \times 3)\vec{w} = 2(3\vec{w}) = 3(2\vec{w})$
De plus, On a $2(\vec{u} + \vec{v}) = 2\vec{u} + 2\vec{v}$





Exemples [Savoir simplifier l'expression d'un vecteur] :

- Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On cherche à simplifier l'écriture de $\vec{w} = 3(\vec{u} + 2\vec{v}) - 5\vec{u} + 3\vec{v}$.
  $\vec{w} = 3\vec{u} + 6\vec{v} - 5\vec{u} + 3\vec{v}$ en développant
  $\vec{w} = 3\vec{u} - 5\vec{u} + 3\vec{v} + 6\vec{v}$ en regroupant les termes de la somme
  $\vec{w} = (3 - 5)\vec{u} + (3 + 6)\vec{v}$ en factorisant
  $\vec{w} = -2\vec{u} + 9\vec{v}$ en simplifiant.
- Soient A, B, C et D quatre points.
  On cherche à placer le point M tel que $\vec{AM} = 3\vec{AB} - 2\vec{AC} - 2\vec{CB} + 3\vec{BD}$.
  On se ramène à une écriture ne comportant pas de différence en utilisant les vecteurs opposés, par exemple $-\vec{AC} = \vec{CA}$:
  $\vec{AM} = 3\vec{AB} + 2\vec{CA} + 2\vec{BC} + 3\vec{BD}$
  On factorise quand c'est possible en utilisant $k\vec{u} + k\vec{v} = k(\vec{u} + \vec{v})$:
  $\vec{AM} = 3\vec{AB} + 2(\vec{CA} + \vec{BC}) + 3\vec{BD} = 3\vec{AB} + 2(\vec{BC} + \vec{CA}) + 3\vec{BD}$
  On utilise la relation de Chasles quand c'est possible :
  $\vec{AM} = 3\vec{AB} + 2\vec{BA} + 3\vec{BD}$
  On ne peut pas utiliser la relation de Chasles avec $3\vec{AB} + 2\vec{BA}$ à cause des coefficients qui sont différents mais on remarque que l'on peut effectuer un regroupement suivi d'une factorisation :
  $\vec{AM} = 3\vec{AB} + 3\vec{BD} + 2\vec{BA} = 3(\vec{AB} + \vec{BD}) + 2\vec{BA}$
  On peut ensuite utiliser la relation de Chasles :
  $\vec{AM} = 3\vec{AD} + 2\vec{BA}$
  et on ne peut pas simplifier davantage en général mais on peut placer plus simplement le point M à l'issue de cette simplification.