Repérage et vecteurs, cours de seconde

1 Coordonnées de vecteurs

Définition :

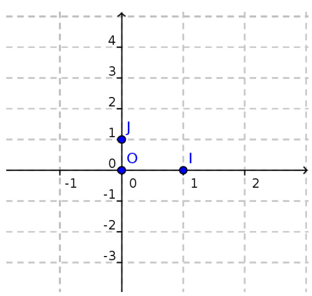
Un *repère du plan* est déterminé par :

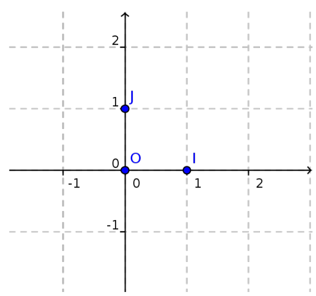
- par .... On note alors .... ce repère.
- ou par un point O et .... On note alors .... ce repère.

Définition :

Soit $(O;\vec{i};\vec{j})$ un repère du plan.

- On dit que $(O;\vec{i};\vec{j})$ est un repère .... si les directions de $\vec{i}$ et de $\vec{j}$ sont perpendiculaires.
- On dit que $(O;\vec{i};\vec{j})$ est un repère .... ou forme une base .... si les directions de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont perpendiculaires et si $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\|$.

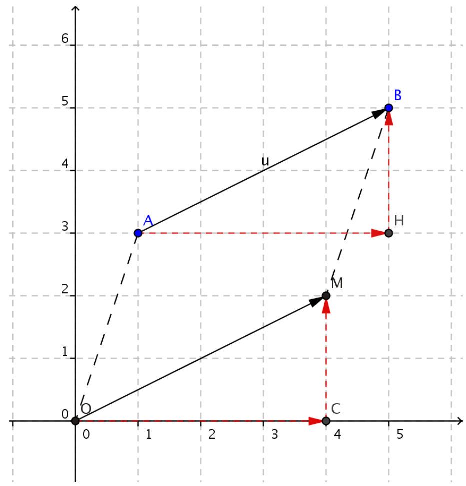




Propriété :

Soit un point M d'un plan muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$. Les trois propositions sont équivalentes :

- Le point M a pour coordonnées $(x;y)$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$;
- le vecteur .... a pour coordonnées $(x;y)$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$
- ....$= x\vec{i} + y\vec{j}$.



Exemple [Lecture graphique de coordonnées de vecteurs] :

Sur la figure ci-dessus, A a pour coordonnées .... et B a pour coordonnées ....
Les coordonnées du point M tel que .... sont ....
Les coordonnées du vecteur $\vec{AB}$ sont donc ....

Remarque :

Les coordonnées de vecteurs peuvent être notées verticalement :
$\vec{u}(x_{\vec{u}}; y_{\vec{u}})$ s'écrit ainsi aussi $\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$.

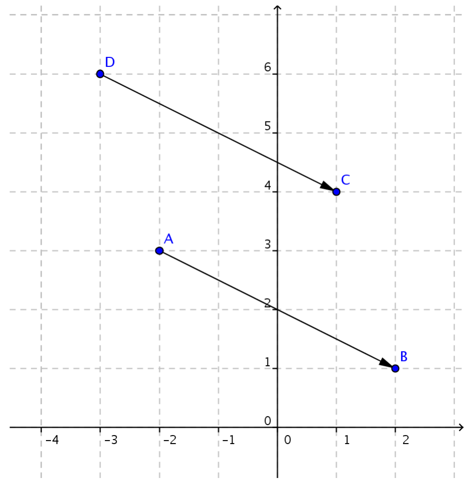
Propriété :
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont égaux si et seulement si leurs coordonnées ....

Propriété :
Soient A et B deux points de coordonnées $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$ dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
Alors les coordonnées de $\vec{AB}$ sont

...

Exemple [Calcul des coordonnées d'un point vérifiant une égalité vectorielle] :

Soient A, B et C les points de coordonnées respectives $(-2; 3)$, $(2; 1)$ et $(1; 4)$ dans un repère du plan.



- $\vec{AB}$ a pour coordonnées ....
  c'est à dire ....
  donc ....

- Cherchons les coordonnées du point D tel que $\vec{AB} = \vec{DC}$
  ...
  ...
  ...
  ...
  ....

Algorithmique :

- Algorithme de calcul des coordonnées $(x_{AB}; y_{AB})$ du vecteur $\vec{AB}$ dont les extrémités A et B ont pour coordonnées $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$:

```
Entrées : .....
Début traitement
  | Affecter à x_AB la valeur .............. ;
  | Affecter à y_AB la valeur ............. ;
Fin
Sorties : x_AB, y_AB.
```

- Algorithme de test de l'égalité de deux vecteurs $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ dont les coordonnées (x_1, y_1) et $(x_2; y_2)$ sont données :

```
Entrées : x1, y1, x2, y2 ;
Début traitement
  | si ................... alors
  |   | Afficher "vecteurs égaux" ;
  | sinon
  |   | Afficher "vecteurs pas égaux" ;
  | fin
Fin
```

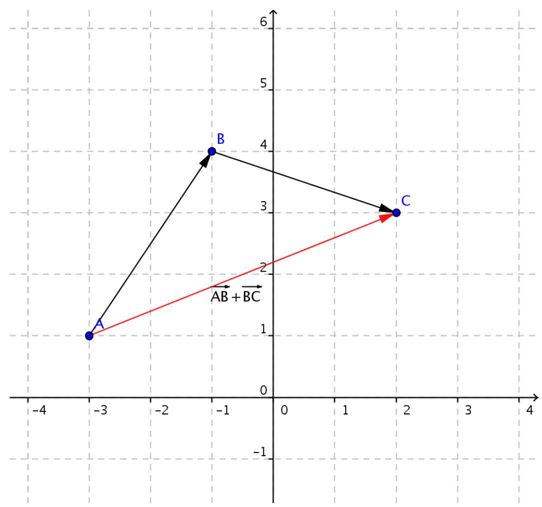
2 Coordonnées de sommes de vecteurs

Propriétés :
Soit $(O;\vec{i};\vec{j})$ un repère du plan. On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées $(x_{\vec{u}};y_{\vec{u}})$ et $(x_{\vec{v}};y_{\vec{v}})$.

- $-\vec{u}$ a pour coordonnées .... ;
- $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées .... ;

Preuve :

- soient A et B sont deux points tels que $\vec{u}=\vec{AB}$.
  Les coordonnées de $\vec{u}$ sont donc $(x_B-x_A;y_B-y_A)$.
  Or $\vec{BA}$ est l'opposé de $\vec{u}$ et a pour coordonnées $(x_A-x_B;y_A-_B)$ qui sont opposées à celles de $\vec{u}$;
- Soient A, B et C trois points tels que $\vec{u}=\vec{AB}$ et $\vec{v}=\vec{BC}$. D'après la relation de Chasles on peut écrire que $\vec{u}+\vec{v}=\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{AC}$.
  Or les abscisses de $\vec{AB}$ et $\vec{BC}$ sont respectivement x_B-x_A et x_C-x_B.
  Leur somme est $x_B-x_A+x_C-x_B=x_C-x_A$ qui est l'abscisse de $\vec{AC}$.
  De même pour les ordonnées.



Exemple de calcul sur les coordonnées de sommes :

Soient A, B deux points du plan de coordonnées respectives $(-3;1)$ et $(1,4)$. Soit u le vecteur de coordonnées $(1;-1)$. Cherchons les coordonnées du vecteur $\vec{v}$ défini par $\vec{v}=\vec{AB}+\vec{u}$.

...

...

...

...

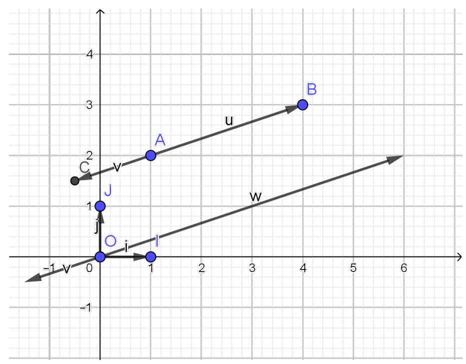
...

3 Coordonnées du produit d'un vecteur par un nombre réel

Définition :
Soit $(O;\vec{i};\vec{j})$ un repère du plan. Soit $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées $(x_{\vec{u}};y_{\vec{u}})$ dans ce repère.
Soit k un nombre réel. le *vecteur produit de $\vec{u}$ par k*, est le vecteur de coordonnées :

.....

dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.



Exemples :

- [Savoir calculer des coordonnées de sommes et de produits de vecteurs] :
  Soient $\vec{u}(2;3)$ et $\vec{v}(4;5)$. Soit $\vec{w}=-6\vec{u}+5\vec{v}$. Calculons les coordonnées de $\vec{w}$.
  ...
  ...
  ...
  ...
  ...
- [Savoir calculer les coordonnées d'un point vérifiant une égalité vectorielle] :
  Soient $A(3;-5)$ et $B(1;4)$.
  On considère le point M tel que $4\vec{MA}=5\vec{AB}$. Calculons les coordonnées du point M :
  ...
  ...
  ...
  ...
  ...:.......... ....
  .... D'où M.....
  ....

cc BY NC SA

4 Coordonnées du milieu d'un segment

Propriété :
Soient A et B deux points de coordonnées respectives $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$ d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Alors le *milieu K du segment* $[AB]$ a pour abscisse .... et pour ordonnée ...., c'est à dire, a pour coordonnées :

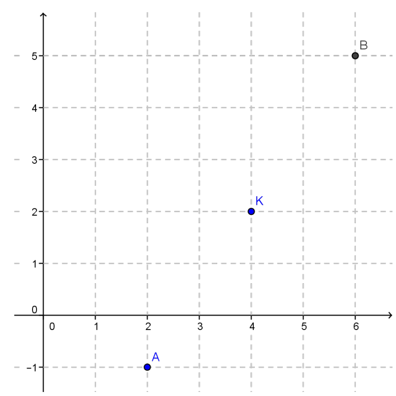
....

et

....

Exemples :

- Soient $A(5; 7)$ et $B(-3; 2)$. Alors le milieu K de $[AB]$ a pour coordonnées :
  ....
  ....
  ....
  ....
- Soient $A(2; -1)$ et $K(4; 2)$. Cherchons les coordonnées du point $B(x; y)$ tel que K est le milieu de [AB] :
  ....
  ....
  ....
  ....
  ....



Algorithmique :
Algorithme de calcul des coordonnées du milieu du segment $[AB]$ avec A et B de coordonnées respectives $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$:

Entrées : x_A, y_A, x_B, y_B
Début traitement
  Affecter à .... la valeur ....;
  Affecter à .... la valeur ....
Fin
Sorties : x_K, y_K

5 Distance dans un repère orthonormé

Propriété :

On considère un vecteur $\vec{u}$

- Si $\vec{u}$ a pour coordonnées $(x_{\vec{u}}; y_{\vec{u}})$ dans un repère *orthonormé*, alors sa norme $\|\vec{u}\|$ est donnée par :

  ....

- Si $\vec{u} = \vec{AB}$ avec $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ dans un repère orthonormé, alors $\|\vec{AB}\|$ est égale à

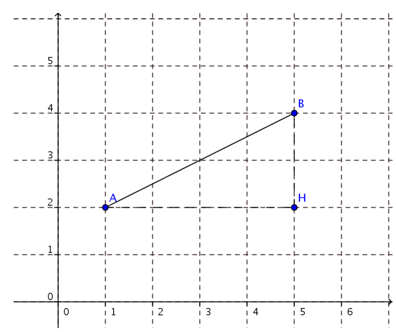
  ...

  La distance AB est donc égale à

  ...

Preuve :

On supposera afin d'alléger les écritures que $x_A < x_B$ et $y_A < y_B$, les autres cas se démontrant de la même manière. Soit H le point de coordonnées $(x_B; y_A)$. Le repère est orthonormal donc les droites (AH) et (BH) sont perpendiculaires en H et l'unité est la même sur les deux axes. La distance AH vaut $x_B - x_A$ et la distance BH est $y_B - y_A$. Dans le triangle ABH rectangle en H, le théorème de PYTHAGORE permet donc d'écrire que $AB^2 = AH^2 + BH^2$ c'est à dire $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$ d'où la formule.



Exemple :

On considère les points $A(8; -2)$ et $B(-2; 5)$. Alors la distance AB est :

...

...

Algorithmique :

Algorithme de calcul de la distance entre deux points A et B de coordonnées respectives $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$:

Entrées : x_A, y_A, x_B, y_B
Début traitement
Affecter à ...... la valeur ....
Fin
Sorties : d

6 Traduction vectorielle de propriétés géométriques

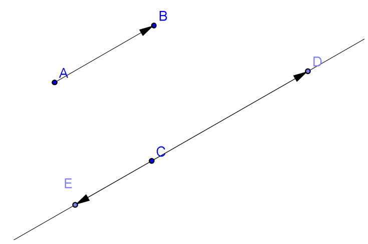
6.1 Milieux de segments

Propriété :
Soient A, B et I trois points. I est le milieu du segment $[AB]$ si et seulement si .... si et seulement si ....

6.2 Alignement et parallélisme

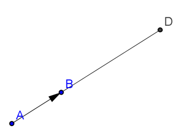
Définition :
Deux vecteurs non nuls sont *colinéaires* si il existe un réel k non nul tel que ....

Remarque :
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si ils ont la même ....



Exemple :
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives $(5; -3)$ et $(-15; 9)$ dans un repère.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires car $\vec{v} =$ ....$\vec{u}$ ou $\vec{u} =$ ....$\vec{v}$.

Propriétés :
- Soient A, B et C trois points. A, B et C sont alignés et distincts si et seulement si il existe un nombre réel k non nul tel que $\vec{AB} = k\vec{AC}$;
- Soient A, B, C et D quatre points. Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont colinéaires.



Définition :
On appelle *déterminant* de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées $(x_{\vec{u}}; y_{\vec{u}})$ et $(x_{\vec{v}}; y_{\vec{v}})$ le nombre

....

Propriété :
Soient $\vec{u}(x_{\vec{u}}; y_{\vec{u}})$ et $\vec{v}(x_{\vec{v}}; y_{\vec{v}})$ deux vecteurs non nuls dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont .... si et seulement si le déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est égal à .... c'est à dire si et seulement si ....

Exemple :
[Déterminer si des vecteurs sont colinéaires]
Soient A et B les points de coordonnées $(1; 3)$ et $(2; 1)$ dans un repère. Soit $\vec{v}$ le vecteur de coordonnées $(4; 3)$. $\vec{AB}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?

...

...

...

....