Repérage et vecteurs, cours pour la classe de seconde

F.Gaudon

1er août 2021

Table des matières

1 Coordonnées de vecteurs

Définition :

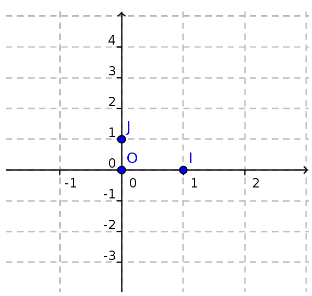
Un *repère du plan* est déterminé par :

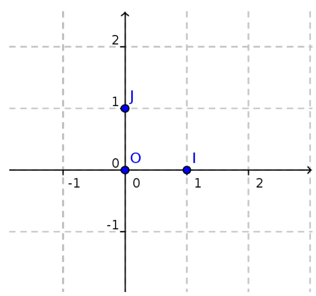
- par trois points O, I et J non alignés. On note alors $(O; I; J)$ ce repère.
- ou par un point O et deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ non nuls de direction non parallèle. On note alors $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ce repère.

Définition :

Soit $(O; \vec{i}; vecj)$ un repère du plan.

- On dit que $(O; \vec{i}; \vec{j})$ est un repère *orthogonal* si les directions de $\vec{i}$ et de $\vec{j}$ sont perpendiculaires.
- On dit que $(O; \vec{i}; \vec{j})$ est un repère *orthonormé* ou forme une *base orthonormée* si les directions de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont perpendiculaires et si $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\|$.

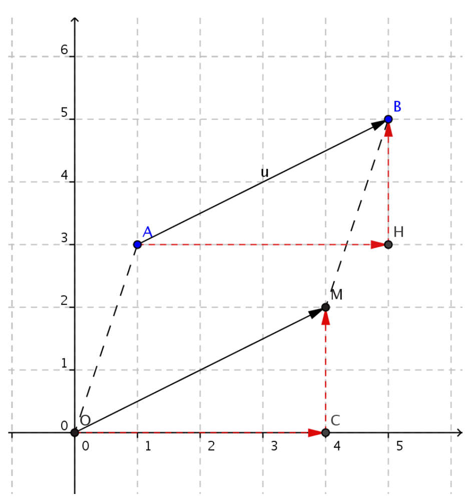




Propriété :

Soit un point M d'un plan muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Les trois propositions sont équivalentes :

- Les point M a pour coordonnées $(x; y)$ dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$;
- le vecteur $\vec{OM}$ a pour coordonnées $(x; y)$ dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$
- $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.



Exemple :
Sur la figure ci-dessus, A a pour coordonnées $(1;3)$ et B a pour coordonnées $(5;5)$. Les coordonnées du point M tel que $\vec{OM} = \vec{AB}$ sont $(4;2)$. Les coordonnées du vecteur $\vec{AB}$ sont donc $(4;2)$

Remarque :
Les coordonnées de vecteurs peuvent être notées verticalement : $\vec{u}(x_{\vec{u}}; y_{\vec{u}})$ s'écrit ainsi aussi $\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$.

Propriété :

> Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coordonnées dans un repère.

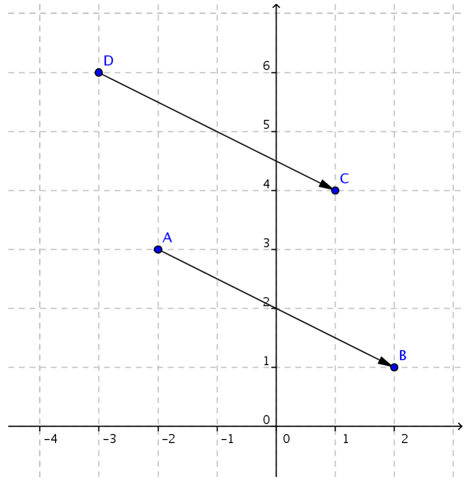
Preuve :
Soient A et B deux points tels que $\vec{AB} = \vec{u}$ et C et D deux points tels que $\vec{CD} = \vec{v}$. Soit M le point tel que $\vec{OM} = \vec{AB}$ et N le point tel que $\vec{ON} = \vec{CD}$. Alors $\vec{u} = \vec{v}$ si et seulement si $\vec{AB} = \vec{CD}$ c'est à dire $\vec{OM} = \vec{ON} = \vec{AB}$ c'est à dire encore M et N sont confondus ce qui signifie qu(ils ont les mêmes coordonnées dans le repère $(O; I; J)$.

Propriété :

> Soient A et B deux points de coordonnées $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$ dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Alors les coordonnées de $\vec{AB}$ sont :
>
> $$(x_B - x_A; y_B - y_A)$$

Exemples :

- [Calculer les coordonnées d'un vecteur connaissant les coordonnées des extrémités]
  Soient E et F les points de coordonnées respectives $(-1;3)$ et $(6;-3)$ dans un repère.
  On a $x_{\vec{EF}} = x_F - x_E = 6 - (-1) = 7$
  $y_{\vec{EF}} = y_F - y_E = -3 - 3 = -6$
  D'où $\vec{EF}(7;-6)$
- [Calcul de coordonnées de points vérifiant une égalité vectorielle]
  Soient A, B et C les points de coordonnées respectives $(-2;3)$, $(2;1)$ et $(1;4)$ dans un repère du plan.
  Cherchons les coordonnées du point D tel que $\vec{BA} = \vec{CD}$
  Or $\vec{BA}$ a pour coordonnées $(x_A - x_B; y_A - y_B)$ c'est à dire $((-2) - 2; 3 - 1)$ donc $(-4;2)$.
  Le vecteur $\vec{CD}$ a lui pour coordonnées $(x_D - 1; y_D - 4)$.
  Les deux vecteurs sont égaux si et seulement si leurs coordonnées sont égales
  c'est à dire $-4 = x_D - 1$ et $2 = y_D - 4$
  d'où $x_D = -4 + 1$ et $y_D = 4 + 2$
  donc $x_D = -3$ et $y_D = 6$.
  D a donc pour coordonnées $(-3;6)$.



Algorithmique :

- Algorithme de calcul des coordonnées $(x_{AB}; y_{AB})$ du vecteur $\vec{AB}$ dont les extrémités A et B ont pour coordonnées $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$:

Entrées : x_A, y_A, x_B, y_B ;
Début traitement
  $x_{AB} \leftarrow x_B - x_A$;
  $y_{AB} \leftarrow y_B - y_A$;
Fin
Sorties : x_{AB}, y_{AB}.

- Algorithme de test de l'égalité de deux vecteurs $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ dont les coordonnées (x_1, y_1) et $(x_2; y_2)$ sont données :

Entrées : x_1, y_1, x_2, y_2 ;
Début traitement
  si *$(x_1 = x_2)$ et $(y_1 = y_2)$* **alors**
    Renvoyer *"vecteurs égaux"* ;
  sinon
    Renvoyer *"vecteurs pas égaux"* ;
  fin
Fin

2 Distance entre deux points

Propriété :

On considère un vecteur $\vec{u}$

- Si $\vec{u}$ a pour coordonnées $(x_{\vec{u}}; y_{\vec{u}})$ dans un repère *orthonormé*, alors :

$$\|u\| = \sqrt{x_{\vec{u}}^2 + y_{\vec{u}^2}}$$

- Si $\vec{u} = \vec{AB}$ avec $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ dans un repère orthonormé, alors :

$$\||\vec{AB}|\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Propriété :

On considère deux points A et B de coordonnées $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$ dans un repère $(O; I; J)$ orthonormal. Alors la distance AB est donnée par :

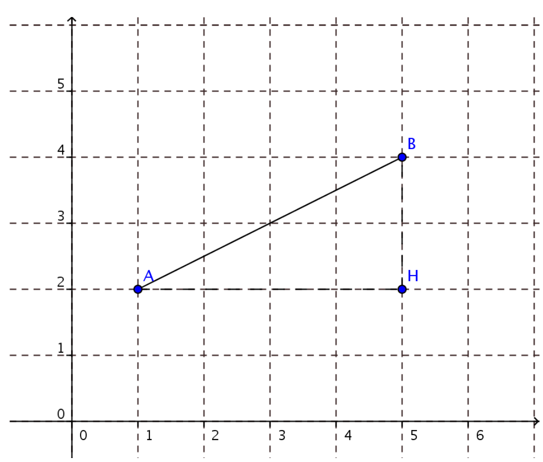
$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

ce qui s'écrit aussi :

$$AB = \sqrt{(y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2}$$

Preuve :

On supposera afin d'alléger les écritures que $x_A < x_B$ et $y_A < y_B$, les autres cas se démontrant de la même manière. Soit H le point de coordonnées $(x_B; y_A)$. Le repère est orthonormal donc les droites (AH) et (BH) sont perpendiculaires en H et l'unité est la même sur les deux axes. La distance AH vaut $x_B - x_A$ et la distance BH est $y_B - y_A$. Dans le triangle ABH rectangle en H, le théorème de Pythagore permet donc d'écrire que $AB^2 = AH^2 + BH^2$ c'est à dire $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$ d'où la formule.



Exemple :
On considère les points $A(8;-2)$ et $B(-2;4)$. Alors la distance AB est :
$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
donc $AB = \sqrt{(-2-8)^2 + (4-(-2))^2}$
d'où $AB = \sqrt{(-10)^2 + 6^2}$
et $AB = \sqrt{136}$ donc $AB = 2\sqrt{34}$

Algorithmique :
Algorithme de calcul de la distance entre deux points A et B de coordonnées respectives $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$:

Entrées : x_A, y_A, x_B, y_B
Début traitement
Affecter à d la valeur $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
Fin
Sorties : d

3 Coordonnées du milieu d'un segment

Propriété :

Soient A et B deux points de coordonnées respectives $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$ d'un repère $(O; I; J)$. Alors le *milieu* K du segment $[AB]$ a pour abscisse la moyenne des deux abscisses et pour ordonnée la moyenne des ordonnées, c'est à dire, a pour coordonnées :

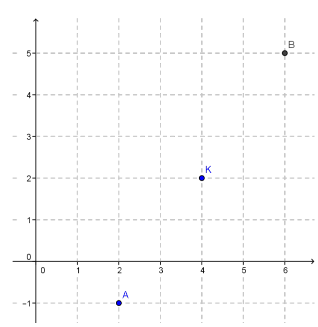
$$x_K = \frac{x_A + x_B}{2}$$

et

$$y_K = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Exemples :

- Soient $A(5;7)$ et $B(-3;2)$. Alors le milieu K de $[AB]$ a pour coordonnées :
  $x_K = \frac{x_A+x_B}{2} = \frac{5+(-3)}{2} = 1$
  et $y_K = \frac{y_A+y_B}{2} = \frac{7+2}{2} = \frac{9}{2}$
- Soient $A(2;-1)$ et $K(4;2)$. Le point $B(x;y)$ tel que K est le milieu de $[AB]$ vérifie
  $4 = \frac{2+x}{2}$ et $2 = \frac{-1+y}{2}$
  donc $2 + x = 8$ et $-1 + y = 4$
  d'où $x = 6$ et $y = 4 + 1$
  c'est à dire $y = 5$.



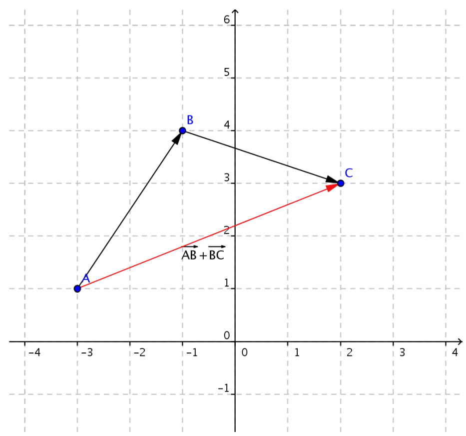
4 Coordonnées de la somme de vecteurs

Propriétés :

> Soit $(O;\vec{i};\vec{j})$ un repère du plan. On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées $(x_{\vec{u}};y_{\vec{u}})$ et $(x_{\vec{v}};y_{\vec{v}})$.
> - $-\vec{u}$ a pour coordonnées $(-x_{\vec{u}};-y_{\vec{v}})$
> - $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $(x_{\vec{u}}+x_{\vec{v}};y_{\vec{u}}+y_{\vec{v}})$;

Preuve :

- soient A et B sont deux points tels que $\vec{u}=\vec{AB}$. Les coordonnées de $\vec{u}$ sont donc $(x_B-x_A;y_B-y_A)$. Or $\vec{BA}=-\vec{u}$ et a pour coordonnées $(x_A-x_B;y_A-y_B)$ qui sont opposées à celles de $\vec{u}$;
- Soient A, B et C trois points tels que $\vec{u}=\vec{AB}$ et $\vec{v}=\vec{BC}$. D'après la relation de Chasles on peut écrire que $\vec{u}+\vec{v}=\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{AC}$. Or les abscisses de $\vec{AB}$ et $\vec{BC}$ sont respectivement x_B-x_A et x_C-x_B. Leur somme est $x_B-x_A+x_C-x_B=x_C-x_A$ qui est l'abscisse de $\vec{AC}$. De même pour les ordonnées.



Exemple de calcul sur les coordonnées de sommes :
Soient A, B et C trois points du plan de coordonnées respectives $(-3;1)$, $(1,4)$ et $(2;3)$.
Alors le vecteur $\vec{AB}$ a pour coordonnées $(2;3)$,
le vecteur $\vec{BC}$ a pour coordonnées $(3;-1)$.
On peut vérifier que $\vec{AC}$ a pour coordonnées $(2+3;3-1)$ soit $(5;2)$.

5 Coordonnées du produit d'un vecteur par un nombre réel

Définition :

> Soit $(O;\vec{i};\vec{j})$ un repère du plan. Soit $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées $(x;y)$ dans ce repère. Soit k un nombre réel. Le *vecteur produit de $\vec{u}$ par k*, est le vecteur de coordonnées $(kx;ky)$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Exemple [Calculer les coordonnées d'un vecteur] :
Soient $\vec{u}(2;3)$ et $\vec{v}(4;5)$. Soit $\vec{w}=-6\vec{u}+5\vec{v}$.
Alors $-6\vec{u}$ a pour coordonnées $(-12;-18)$
et $5\vec{v}$ a pour coordonnées $(20;25)$.
D'où $\vec{w}(-12+20;-18+25)$ donc $\vec{w}(8;7)$.

Exemple [Calculer les coordonnées d'un point vérifiant une égalité vectorielle] :
Soient $A(3;-5)$ et $B(1;4)$.
On considère le point M tel que $4\vec{MA} = 5\vec{AB}$.
• On a d'une part, $\vec{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$
donc $\vec{AB}(1-3; 4-(-5))$
c'est à dire $\vec{AB}(-2;9)$.
D'où $5\vec{AB}(-10;45)$.
• D'autre part, $\vec{MA}(3-x_M; -5-y_M)$
d'où $4\vec{MA}(4(3-x); 4(-5-y_M))$
donc $4\vec{MA}(12-4x; -20-4y_M)$
• De $3\vec{MA} = 5\vec{AB}$ on déduit donc :
$12-4x = -10$ et $-20-4y_M = 45$.
D'où $-4x = -22$ et $-4y_M = 65$
et $x_M = \frac{22}{4}$ et $y_M = \frac{-65}{4}$

6 Traduction vectorielle de propriétés géométriques

6.1 Milieux de segments

Propriété :

> Soient A, B et I trois points. I est le milieu du segment $[AB]$ si et seulement si $\vec{AI} = \vec{IB}$ si et seulement si $\vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AB}$.

Preuve :
Immédiat

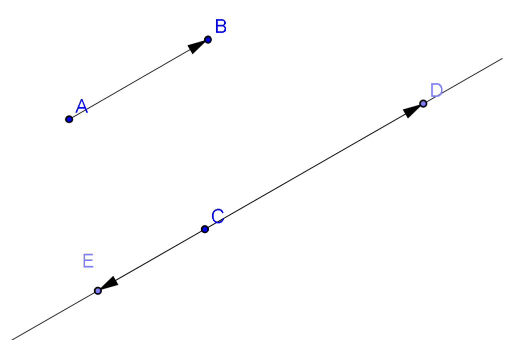
6.2 Alignement et parallélisme

Définition :

> Deux vecteurs non nuls sont *colinéaires* si il existe un réel k non nul tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

Remarque :
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si ils ont la même direction.

Exemple :
[Déterminer si deux vecteurs de coordonnées données sont colinéaires]
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives $(5;-3)$ et $(-15;9)$ dans un repère.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires car $\vec{v} = -3\vec{u}$ ou $\vec{u} = -\frac{1}{3}\vec{v}$.



Propriétés :

- Soient A, B et C trois points distincts . A, B et C sont alignés si et seulement si il existe un nombre réel $k \neq 0$ tel que $\vec{AB} = k\vec{AC}$;
- Soient A, B, C et D quatre points. Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont colinéaires.

Définition :

On appelle *déterminant* de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées $(x_{\vec{u}}; y_{\vec{u}})$ et $(x_{\vec{v}}; y_{\vec{v}})$ le nombre

$$x_{\vec{u}}y_{\vec{v}} - y_{\vec{u}}x_{\vec{v}}$$

Propriété :

Soient $\vec{u}(x_{\vec{u}}; y_{\vec{u}})$ et $\vec{v}(x_{\vec{v}}; y_{\vec{v}})$ deux vecteurs non nuls dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles si et seulement si le déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est égal à 0 c'est à dire si et seulement si

$$x_{\vec{u}}y_{\vec{v}} - x_{\vec{v}}y_{\vec{u}} = 0$$

Exemple [Déterminer si des vecteurs sont colinéaires] :
Soient A et B les points de coordonnées $(1; 3)$ et $(2; 1)$ dans un repère. Soit $\vec{v}$ le vecteur de coordonnées $(4; 3)$. $\vec{AB}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?
$\vec{AB}$ a pour coordonnées $(2 - 1; 1 - 3)$ donc $(1; -2)$.
On a $x_{\vec{AB}}y_{\vec{v}} - x_{\vec{v}}y_{\vec{AB}} = 1 \times 3 - 4 \times (-2) = 3 + 8 = 11 \neq 0$
donc les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.