

Probabilités - cours - 2nde

F.Gaudon

13 mai 2023

Table des matières

1	Expériences aléatoires et échantillons	2
2	Lois de probabilité	4
3	Événements	5
4	Équiprobabilité	5
5	Calculs avec des probabilités	7

1 Expériences aléatoires et échantillons

Définitions :

- Une expérience est dite *aléatoire* lorsqu'elle a plusieurs issues aussi appelées *éventualités* possibles dont on ne peut pas prévoir laquelle sera réalisée.
- L'ensemble de toutes les éventualités constitue *l'univers* de tous les possibles.
- On appelle *échantillon* un ensemble de valeurs issues de réalisations d'une expérience aléatoire.
- L'effectif d'un échantillon est appelé sa *taille*.
- On appelle *distribution de fréquences* liée à un échantillon, la donnée des différentes valeurs de cet échantillon et des fréquences associées à cet échantillon.
- on appelle *fluctuation d'échantillonnage* la variation des distributions de fréquence en fonction de l'échantillon choisi d'une population.
- *Simuler* une expérience aléatoire, c'est la remplacer par une autre expérience aléatoire dont les distributions de fréquences qu'elle donnerait pour un grand nombre de tirages serait proches.

Exemple :

- Le lancer d'un dé à six faces constitue une expérience aléatoire d'issue x_i pour i allant de 1 à 6 et correspondants à la sortie de la face i du dé. Il y a donc 6 issues ou éventualités possibles.
- En supposant qu'il naît autant de garçons que de filles, la naissance d'un garçon ou d'une fille peut être simulée par le lancer d'une pièce, le côté pile représentant la naissance d'un garçon et le côté face la naissance d'une fille.
- Une urne contient 5 boules indiscernables numérotées de 1 à 5. On tire une boule au hasard et on la remet dans l'urne. On effectue 100 tirages. On obtient ainsi un échantillon de taille 100. On effectue 3 séries de 100 tirages. Des exemples de distribution de fréquences associées à chacun de ces tirages pourraient être les suivantes :

	1	2	3	4	5
A	0,2	0,22	0,15	0,23	0,2
B	0,25	0,12	0,2	0,18	0,25
C	0,18	0,28	0,15	0,22	0,17

Propriété :

Soit n un entier naturel. Les séquences de tableur suivantes permettent d'obtenir des nombres entiers naturels au hasard compris entre 1 et $n - 1$ afin de simuler une expérience aléatoire comportant n issues possibles : `ALEA.ENTRE.BORNES(1,n)` ou `ENT(ALEA()*n)+1`

Utilisation des calculatrices et programmation en python :

- **[CASIO :]** Appuyer sur la touche `OPT`, sélectionner le menu `PROB` (éventuellement le rechercher avec la touche `▷`) puis la commande `Int` de ce menu. Compléter alors l'instruction **RanInt#(1,n)** (attention à utiliser la touche `,`) et appuyer sur la touche `EXE`.
- **[TI :]** Dans le menu `math`, sélectionner le menu `PRB`, puis la commande `entAléat` de ce menu. Appuyer sur la touche `ENTER` et compléter l'instruction `entAléat(0,n)` (attention à utiliser la touche `,`).
- **[Programmation python :]** La fonction `random.randint(1,n)` permet de générer un nombre pseudo-aléatoire entre 1 et n . Pour l'utiliser, il faut écrire auparavant (de préférence en début de programme) `import random` qui importe en mémoire toutes les fonctions de gestion du hasard.

2 Loïs de probabilité

Définition :

Pour toute expérience aléatoire d'issues possibles x_1, x_2, \dots, x_n avec n entier naturel, on définit une *loi de probabilité* en leur associant n nombres réels p_1, p_2, \dots, p_n tels que :

- pour tout i allant de 1 à n , $0 \leq p_i \leq 1$;
- $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$.

Propriété (loi des grands nombres) :

Si on répète une expérience aléatoire d'univers $E = \{x_1; x_2; x_3; \dots; x_n\}$ un « grand nombre de fois » et pour une loi de probabilité adaptée à la situation, alors les fréquences de réalisation des issues x_i se stabilisent autour des nombres p_i .

Remarque :

Ainsi, simuler des échantillons d'une expérience aléatoire permet *d'estimer* une probabilité et l'estimation sera d'autant plus fiable que la taille de l'échantillon est grande.

Exemple :

On jette un dé 100 fois et on note la face apparue à chaque lancer. Si le 1 apparaît 12 fois la fréquence de sortie est $\frac{12}{100} = 0,12$. On a $f_1 + f_2 + \dots + f_6 = 1$.

Si le nombre de lancers devient « grand », les fréquences se stabilisent autour de $\frac{1}{6} \approx 0,167$, probabilité d'apparition du 1.

Définition :

On appelle *loi de probabilité* d'une expérience aléatoire, la donnée de l'ensemble des issues possibles x_i et des probabilités p_i de chacune des issues.

valeurs x_i	x_1	x_2	...	x_n
probabilités p_i	p_1	p_2	...	p_n

Exemple :

Une pièce de monnaie est truquée de sorte que la probabilité d'obtenir pile est le double de celle d'obtenir face. On appelle p_1 la probabilité d'obtenir pile et p_2 celle d'obtenir face. On a donc $p_1 + p_2 = 1$. Or $p_1 = 2 \times p_2$ donc $2p_2 + p_2 = 1$ d'où $3p_2 = 1$ et $p_2 = \frac{1}{3}$ et $p_1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

D'où la loi de probabilité :

valeurs x_i	pile	face
probabilités p_i	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

Algorithmique :

L'algorithme suivant simule le tirage d'un échantillon de N lancers de dés et calcule les fréquences d'apparition de la face 1 :

Début traitement

```

  c ← 0
  pour i allant de 1 à N faire
    t ← ENT(Nombre aléatoire × 6) + 1
    si t = 1 alors
      c ← c + 1
    fin
  fin
  Renvoyer c/N × 100

```

Fin

3 Événements

Définition :

On considère une expérience aléatoire d'univers des possibles E .

- Un ensemble d'éventualités constitue un *événement*. Un événement A est donc une partie de l'univers. Le nombre d'éventualités qui le constitue est appelé *cardinal* de l'événement et noté $\text{card}(A)$.
- Tout événement formé d'une seule éventualité est appelé *événement élémentaire*.
- \emptyset est appelé *événement impossible*.
- E est l'événement *certain*.
- L'événement \bar{A} appelé événement *complémentaire* ou *contraire* de A est l'ensemble des issues qui ne réalisent pas A .

Exemple :

lancer d'un dé à six faces :

- "obtenir 1 ou 2" est un événement ;
- "obtenir 1" est un événement élémentaire ;
- "obtenir 7" est l'événement impossible.

Définition et propriétés :

- Pour tout événement A , on a $0 \leq P(A) \leq 1$;
- la probabilité d'un événement est la somme des probabilités des issues qui le réalise ;
- $P(\emptyset) = 0$;
- $P(E) = 1$;

4 Équiprobabilité

Définition et propriété :

Lorsque les n issues d'une expérience aléatoire ont la même probabilité p de se réaliser, on parle de *loi équirépartie* ou de situation d'*équiprobabilité*. Alors $p = \frac{1}{n}$.

Exemple :

Pour le lancer d'un dé non truqué à six faces, chaque face ayant la même probabilité d'apparaître, la loi est équirépartie et chaque face i a une probabilité p_i d'apparaître égale à $p_i = \frac{1}{6}$

Propriété (cas d'une loi équirépartie) :

Dans le cas d'une loi équirépartie, la probabilité d'un événement A est :

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'issues favorables à } A}{\text{nombre d'issues possibles dans } E}$$

Exemple :

La tableau suivant montre la répartition des personnels d'une usine :

	Cadres	Ouvriers	Total
Hommes	100	200	300
Femmes	50	150	200
Total	150	350	500

On rencontre une personne au hasard. On note H l'événement « la personne rencontrée est un homme » et C l'événement « la personne rencontrée est un cadre ».

Il y a équiprobabilité car, la rencontre se faisant au hasard, toutes les personnes ont la même probabilité d'être rencontrées.

L'univers est constitué des 500 personnes de l'usine.

L'événement H est constitué de 300 personnes. La probabilité de l'événement H est donc

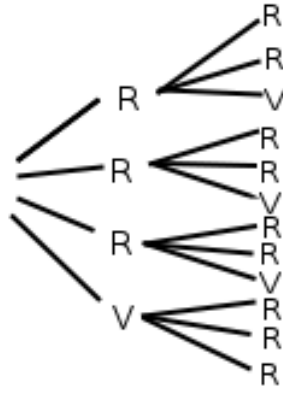
$$P(H) = \frac{300}{500} = \frac{3}{5}.$$

L'événement C est constitué de 150 issues. La probabilité de l'événement C est donc $P(C) =$

$$\frac{150}{500} = \frac{3}{10}.$$

Exemple 2, utilisation d'un *arbre* :

Une urne contient 3 jetons rouges et 1 jeton vert indiscernables au toucher. On tire un jeton, on note sa couleur, on ne remet pas le jeton dans l'urne, on tire un deuxième jeton et on note sa couleur. On peut synthétiser la situation par l'arbre *probabiliste* suivant :



L'univers des possibles est constitué des couples de deux jetons qui apparaissent sur l'arbre précédent. Il y a équiprobabilité car les jetons sont indiscernables. On appelle A l'événement "Obtenir deux jetons rouges". D'après l'arbre, cet événement est constitué de 6 éventualités donc la probabilité de l'événement A est $P(A) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

5 Calculs avec des probabilités

Définition :

Soient A et B deux événements.

- L'événement $A \cap B$ (lire " A inter B " ou " A et B ") est l'ensemble des issues qui réalisent à la fois A et B .
- Lorsqu'aucune issue ne réalise A et B , c'est à dire $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont *incompatibles* ou *disjoints*.
- L'événement $A \cup B$ (lire " A union B " ou " A ou B ") est l'ensemble des issues qui réalisent A ou B , c'est à dire au moins l'un des deux événements.

Propriété :

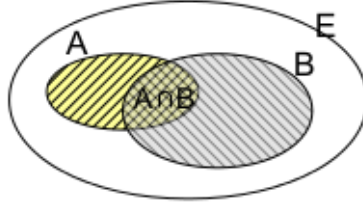
Soit P une loi de probabilité sur un ensemble E .

- Pour tous les événements A et B , on a :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- En particulier, si A et B sont des événements incompatibles, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- Pour tout les événements A et B ,

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

**Preuve :**

- Dans le calcul de $P(A) + P(B)$, les probabilités élémentaires p_i correspondants à l'événement $A \cap B$ apparaissent deux fois pour obtenir $P(A \cup B)$, on les retranche donc une fois ce qui revient à retrancher $P(A \cap B)$ à $P(A) + P(B)$ pour obtenir $P(A \cup B)$
- Si A et B sont incompatibles, on a $A \cap B = \emptyset$ donc $P(A \cap B) = 0$ d'où la formule.
- On a $E = A \cup \bar{A}$ et $A \cap \bar{A} = \emptyset$ donc A et \bar{A} sont incompatibles et $P(E) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$. Or $P(E) = 1$ donc $1 = P(A) + P(\bar{A})$ d'où $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Exemple :

On tire une carte dans un jeu de 32 cartes. Chaque carte a la même probabilité $\frac{1}{32}$ d'être tirée. On appelle C l'événement « On tire un coeur » et R l'événement « On tire un roi ».

La probabilité $P(C)$ est $\frac{8}{32}$. La probabilité $P(R)$ est $\frac{4}{32}$.

$R \cap C$ est l'événement « On tire le roi de coeur ». Sa probabilité $P(R \cap C)$ est $\frac{1}{32}$.

$R \cup C$ est l'événement « On tire un roi ou un coeur ». Sa probabilité est $\frac{8}{32} + \frac{4}{32} - \frac{1}{32} = \frac{11}{32}$.
On enlève $\frac{1}{32}$ afin de ne pas compter deux fois le roi de coeur.