Ordre dans l'ensemble des réels, cours, classe de seconde

F.Gaudon

25 octobre 2018

Table des matières

1 Inégalités

Propriété :

Soient a et b deux nombres réels, alors :
- $a \leq b$ si et seulement si $a - b$ est négatif ;
- $a \geq b$ si et seulement si $a - b$ est positif.

Propriétés :

Soient a, b, c trois nombres réels :
- si $a \leq b$ alors $a + c \leq b + c$ c'est à dire que le sens de l'inégalité ne change pas lorsque l'on ajoute le même nombre dans les deux membres ;
- si $a \leq b$ et $c > 0$ alors $ac \leq bc$ c'est à dire que le sens de l'inégalité ne change pas lorsque l'on multiplie les deux membres de l'inégalité par un même nombre strictement positif ;
- si $a \leq b$ et $c < 0$ alors $ac \geq bc$ c'est à dire que le sens de l'inégalité change lorsque l'on multiplie les deux membres de l'inégalité par le même nombre strictement négatif.

Preuve :
- si $a \leq b$ alors $a - b \leq 0$ c'est à dire $a + c - c - b \leq 0$ donc $a + c - (b + c) \leq 0$ c'est à dire $a + c \leq b + c$;
- si $a \leq b$ et $c > 0$ alors $a - b \leq 0$ et $c(a - b) \leq 0$ donc $ca - cb \leq 0$ c'est à dire $ac \leq bc$.
- si $a \leq b$ et $c < 0$ alors $a - b \leq 0$ et $c(a - b) \geq 0$ donc $ca - cb \geq 0$ c'est à dire $ac \geq bc$.

Exemple :
Encadrement de -2π sachant que $3,14 < \pi < 3,15$.
On a $2 \times 3,14 < 2\pi < 2 \times 3,15$ donc $6,28 < 2\pi < 6,30$ et donc $-6,30 < -2\pi < -6,28$.

Propriétés :

- Si $a \geq b > 0$ et $c \geq 0$, $\frac{a}{c} \geq \frac{b}{c}$ c'est à dire que si deux quotients positifs ont le même dénominateur alors le plus grand est celui qui a le plus grand numérateur.
- Si $a \geq b > 0$ et $c \geq 0$, alors $\frac{c}{a} \leq \frac{c}{b}$ c'est à dire que si deux quotients positifs ont le même numérateur alors le plus grand est celui qui a le plus petit dénominateur.

Preuve :
Seul le deuxième cas n'est pas immédiat.
$\frac{c}{a} - \frac{c}{b} = \frac{cb}{ab} - \frac{ca}{ab}$ donc $\frac{c}{a} - \frac{c}{b} = \frac{cb-ca}{ab} = \frac{c(b-a)}{ab}$.
Comme $a > 0$, $b > 0$ et $c > 0$, de $a \geq b$ on déduit $b - a \leq 0$ d'où $\frac{c}{a} - \frac{c}{b} \leq 0$ donc $\frac{c}{a} \leq \frac{c}{b}$.

Exemple :
Soit n un entier naturel non nul. On pose $a = \frac{n+3}{n+1}$ et $b = \frac{n+3}{n+2}$.
Alors $a \geq b$.

2 Comparaison de a, a^2 et a^3

Propriété :

- Si $a \geq 1$, alors $a^3 \geq a^2 \geq a \geq 1$;
- Si $0 < a < 1$, alors $a^3 \leq a^2 \leq a \leq 1$.

Preuve :

On remarque que $a^3 - a^2 = a^2(a-1)$ et que $a^2 - a = a(a-1)$.

- Si $a \geq 1$ alors $a - 1 \geq 0$ donc $a^2(a-1) \geq 0$ d'où $a^3 - a^2 \geq 0$ donc $a^3 \geq a^2$.
  En outre, $a(a-1) \geq 0$ donc $a^2 - a \geq 0$ donc $a^2 \geq a$.
- Si $a \leq 1$, alors $a - 1 \leq 0$ donc $a^3(a-1) \leq 0$ d'où $a^3 - a^3 \leq 0$ donc $a^3 \leq a^2$.
  En outre, $a(a-1) \leq 0$ donc $a^2 - a \leq 0$ donc $a^2 \leq a$.