Équations de droites, classe de 2nde

1 Notion d'équation cartésienne de droite

Définition :

> Soit $\mathcal{D}$ une droite dans le plan muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.
> On appelle *équation de la droite* $(\mathcal{D})$ ....
> ....
> ....

Propriété :

> Dans un repère, l'ensemble des points M de coordonnées $(x;y)$ telles que $y = ax + b$ avec m et p deux réels fixés est ....

Preuve :
Soit f la fonction affine définie par $f(x) = ax + b$ avec a et b réels. On sait que sa représentation graphique, c'est à dire l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $y = ax + b$ est ....

Propriété et définition :

> Soit $(O;\vec{i};\vec{j})$ un repère du plan.
> - Toute droite du plan admet une équation de la forme .... où a, b et c sont trois réels avec $(a;b) \neq 0$ et x et y sont les inconnues ;
> - réciproquement, toute équation de la forme .... où a, b et c sont trois réels avec $(a;b) \neq 0$ est l'équation d'une droite du plan.
>
> L'équation .... est appelée *équation cartésienne* de la droite.

Preuve :

- Soit $(\mathcal{D})$ la droite passant par les points $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ distincts.
  Soit $M(x;y)$ un point quelconque.
  Les vecteurs $\vec{AM}$ et $\vec{AB}$ ont pour coordonnées respectives :
  .... et ....
  M appartient à $(\mathcal{D})$ signifie que les vecteurs $\vec{AM}$ et $\vec{AB}$ sont .... ce qui se traduit à l'aide du déterminant par :

  ....

  d'où après avoir développé et obtenue une équation de second membre nul :

  $$(y_B - y_A)x - y(x_B - x_A) - x_A(y_B - y_A) + y_A(x_B - x_A) = 0$$

  On a le résultat en posant $a = y_B - y_A$, $b = x_B - x_A$ et $c = -x_A(y_B - y_A) + y_A(x_B - x_A)$. En effet, $y_B - y_A \neq 0$ ou $x_B - x_A \neq 0$ puisque A et B sont distincts.

- Réciproquement, on considère une équation de la forme $ax+by+c=0$ où $(a;b)\neq 0$. Soit M_0 un point de coordonnées $(x_0;y_0)$ tel que $ax_0+by_0+c=0$. Pour tout point M de coordonnées $(x;y)$ vérifiant $ax+by+c=0$ on a donc $ax_0+by_0+c-(ax+by+c)=0$ donc $a(x_0-x)+b(y_0-y)=0$. Soit $\vec{u}$ le vecteur de coordonnées $(-b;a)$, le vecteur $M\vec{M}_0$ a lui pour coordonnées $(x_0-x;y_0-y)$. Ces deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles c'est à dire si et seulement si $a(x0-x)+b(y_0-y)=0$ à l'aide du déterminant. On vient donc de montrer que pour tout point M de coordonnées $(x;y)$ vérifiant $ax+by+c=0$, $M\vec{M}_0$ et $\vec{u}$ sont colinéaires c'est à dire que M appartient à la droite passant par M et de direction $\vec{u}$.

2 Équation réduite

Théorème et définition :

Soit $(O;\vec{i};\vec{j})$ un repère et $\mathcal{D}$ une droite.

- Si $(\mathcal{D})$ .... alors elle admet une équation de la forme :

  ....

  appelée *équation réduite* avec :
  - ...... : nombre réel appelé ....
  - ...... : nombre réel appelé ....
- si $\mathcal{D}$ .... alors elle admet une équation de la forme :

  ....

  avec k nombre réel tel que tous les points de la droite $(\mathcal{D})$ ont pour abscisse k.

Preuve :

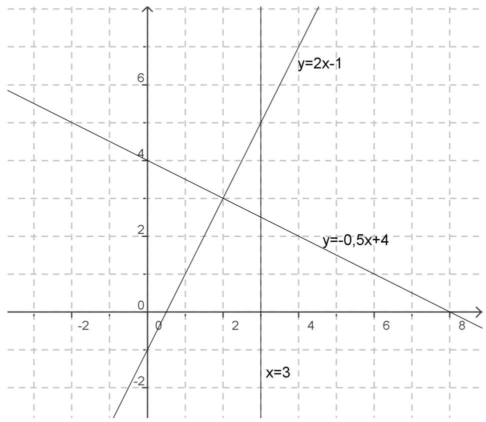
Soit $ax+by+c=0$ une équation de la droite avec $(a;b)\neq 0$.

- Si $b=0$ alors $a\neq 0$ donc $ax+c=0$.
  D'où $ax=-c$ et $x=-\frac{c}{a}$.
  $(\mathcal{D})$ est donc parallèle à l'axe des ordonnées.
- Si $b\neq 0$ alors $by=-ax-c$ donc $y=-\frac{a}{c}x-\frac{c}{b}$.
  Cette équation est de la forme $y=mx+p$ en posant $m=-\frac{a}{c}$ et $p=-\frac{c}{b}$.
  La droite n'est donc pas parallèle à l'axe des ordonnées.

Remarque :

Les droites parallèles à l'axe des abscisses ont une équation réduite de la forme $y=p$ où p est un réel.

Exemple [Savoir tracer une droite d'équation cartésienne donnée] :
On considère l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tels que $2y - 4x = 2$.
...
...
...
...



Propriété :

> Soient A et B de coordonnées $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$ deux points tels que .... Alors la droite (AB) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, elle a donc une équation de la forme .... et on a :
>
> $$m = \text{..........................}$$
>
> et
>
> $$p = \text{.....}$$

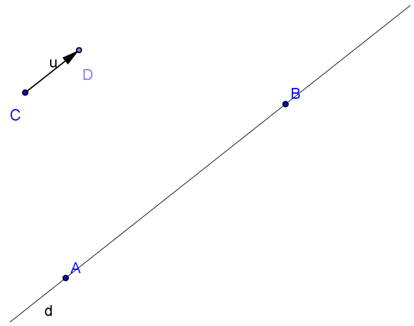
Preuve :
$x_A \neq x_B$ implique que la droite (AB) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées.
En outre, on a $y_B =$ .... et $y_A =$ .... puisque A et B appartiennent à la droite.
D'où $y_B - y_A =$ ....
Donc $m =$ ....
En outre, $A(x_A; y_A)$ appartient à la droite donc $y_A = mx_A + p$ d'où $p =$............... .

Exemple [Savoir déterminer l'équation réduite d'une droite passant par deux points] :
Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par les points A et B de coordonnées $(1; 3)$ et $(-2; 5)$.
...
...
...
...
...

3 Vecteurs directeurs

Définition :

On appelle *vecteur directeur* d'une droite $\mathcal{D}$ tout vecteur non nul .... à cette droite.

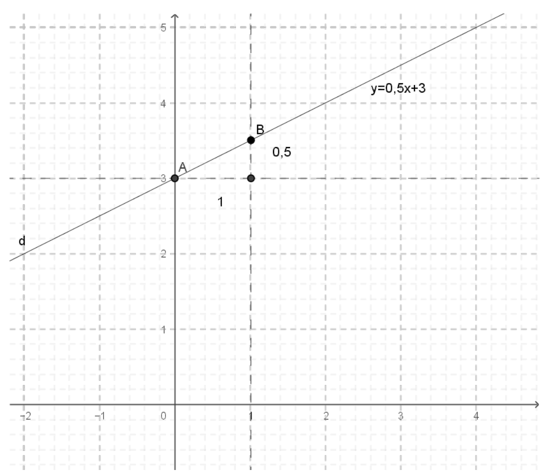


Propriété :

Dans le plan muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, le vecteur $\vec{v}$ de coordonnées (...; ...) est un vecteur directeur de la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = mx + p$.

Preuve :

On considère les points $A(0;p)$ et $B(1;m+p)$.
Ces deux points appartiennent à la droite $\mathcal{D}$ puisque leur coordonnées vérifient l'équation $y = mx + p$.
Le vecteur $\vec{AB}$ est un vecteur directeur et a pour coordonnées $(x_B - x_A; y_B - y_A)$ donc ....
.



Propriété :

Soit d une droite dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ du plan. Si d a pour équation cartésienne $ax + by + c = 0$, alors le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées .... est un vecteur directeur de la droite d.

Preuve :

Si $b \neq 0$, alors l'équation $ax + by + c = 0$ s'écrit $y = \frac{-a}{b}x - \frac{c}{b}$.
Donc, d'après la propriété précédente, le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(1; -\frac{a}{b})$ est un vecteur directeur de la droite et par proportionnalité, le vecteur $-b\vec{u}$ de coordonnées .... aussi.

Exemples :

- Savoir rechercher un vecteur directeur d'une droite :
  Soit d la droite d'équation cartésienne $3x + 2y - 5 = 0$.
  ...
  ...
- Savoir rechercher une équation cartésienne de droite :
  Soit d la droite passant par le point $A(3; 4)$ et de vecteur directeur $\vec{v}(5; 6)$.
  ...
  ...
  ...
  ...
  ...
  ...

4 Parallélisme et systèmes d'équations

Propriété :

> Deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles si et seulement si deux de leurs vecteurs directeurs sont ....

Exemple [Savoir reconnaître si deux droites sont parallèles d'après leur équation cartésienne] :

Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ d'équations cartésiennes respectives $3x + 2y - 5 = 0$ et $-12x - 8y - 1 = 0$.

...

...

...

...

Propriété :

Deux droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ d'équations réduites respectives $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$ sont parallèles si et seulement si ....

Preuve :
On considère les points A et B de la droite d'abscisses respectives 0 et 1. Ces deux points appartiennent à la droite $\mathcal{D}$ donc $y_A =$ .... $=$ .... $=$ .... et $y_B =$ .... $=$ .... $=$ .... Les coordonnées de A et B sont donc $(0; \ldots\ldots..)$ et $(1; \ldots\ldots\ldots)$ respectivement. De même, les points A' et B' de coordonnées respectives $(0; \ldots\ldots.)$ et $(1; \ldots\ldots\ldots..)$ appartiennent à la droite $\mathcal{D}'$. D'où, le vecteur $\vec{AB}$ de coordonnées .... a la même direction que la droite $\mathcal{D}$ et le vecteur $\vec{A'B'}$ de coordonnées .... a la même direction que la droite $\mathcal{D}'$.

Les deux droites sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{A'B'}$ ont la même direction c'est à dire sont colinéaires c'est à dire encore si et seulement si .... ce qui s'écrit finalement ....

Exemples :

- Savoir déterminer une équation d'une droite parallèle à une autre :

  Soit (d) la droite d'équation réduite $y = 3x + 2$ et A le point de coordonnées $(4; 5)$.

  On cherche l'équation de la droite (d') parallèle à (d) passant par A.

  ...

  ...

  ...

- Savoir déterminer les coordonnées du point d'intersection de deux droites d'équations données :

  On considère les droites (d) et (d') d'équations respectives $y = -2x + 1$ et $y = x + 5$.

  On cherche les coordonnées du point d'intersection des deux droites. ...

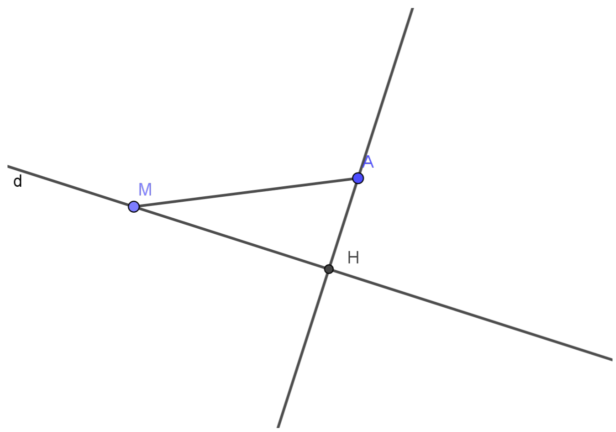
5 Projeté orthogonal d'un point sur une droite

Définition :

Soit d une droite du plan et A un point n'appartenant pas à d. On appelle *projeté orthogonal* du point A sur la droite d le point ....
....
H est aussi appelé .... de la .... à d passant par A.

Propriété :

Soit d une droite et A un point n'appartenant pas à d. Soit H le projeté orthogonal de A sur d. Alors pour tout point M de d, AM..........AH. La distance de A à d est donc égale à ....



Preuve :
Pour tout point M de d distinct de H on a d'après le théorème de Pythagore dans le triangle AHM rectangle en H, l'hypoténuse AM de longueur supérieure à celle de AH d'où la propriété.

Propriété :

Soit ABC un triangle. On considère l'un des sommets du triangle. On appelle *hauteur* issue de ce sommet, la droite ou le segment joignant ce sommet à son projeté orthogonal sur le côté opposé du triangle.