Variations de fonctions, cours, 2nde

1 Croissance, décroissance

Propriétés :

Soient a, b, c trois nombres réels :

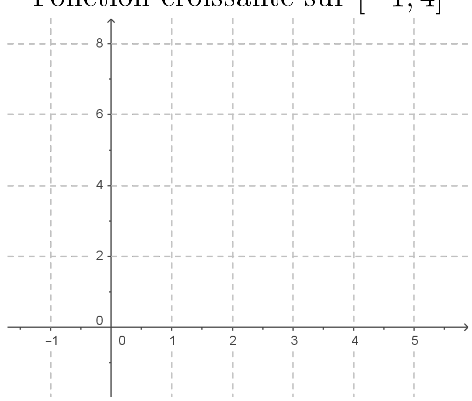
- si $a \leq b$ alors .... c'est à dire que le sens de l'inégalité .... lorsque l'on ajoute le même nombre dans les deux membres ;
- si $a \leq b$ et $c > 0$ alors .... c'est à dire que le sens de l'inégalité .... lorsque l'on multiplie les deux membres de l'inégalité par un même nombre strictement positif ;
- si $a \leq b$ et $c < 0$ alors .... c'est à dire que le sens de l'inégalité .... lorsque l'on multiplie les deux membres de l'inégalité par le même nombre strictement négatif.

Définition :

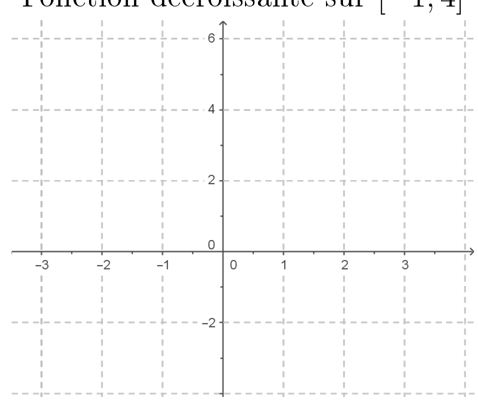
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- La fonction f est dite .... sur l'intervalle I lorsque pour tous x_1 et x_2 réels appartenant à I, si $x_1 \leq x_2$ alors ...., c'est à dire que f .... des inégalités.
- La fonction f est dite .... sur l'intervalle I lorsque pour tous x_1 et x_2 réels appartenant à I, si $x_1 \leq x_2$ alors ...., c'est à dire que f .... des inégalités.
- La fonction f est dite .... sur l'intervalle I lorsqu'elle est ...., ou lorsqu'elle est ....

Fonction croissante sur $[-1; 4]$



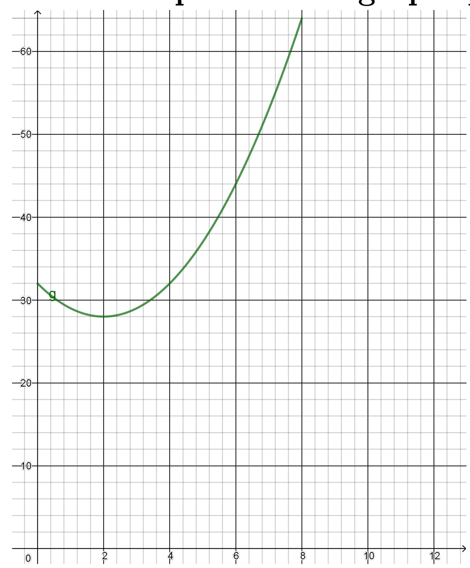
Fonction décroissante sur $[-1; 4]$



Synthèse :

> Pour résumer les variations d'une fonction f on utilise un .... dans lequel apparaissent les intervalles sur lesquels la fonction est monotone.

Exemple [Dresser le tableau de variations d'une fonction par lecture graphique] :



On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0; 8]$ représentée ci-contre. La fonction semble, d'après la représentation graphique, admettre le tableau de variation suivant :

x	0	...	8
$f(x)$	...		....
	....		....
		....	

Exemple [Étudier les variations en utilisant des inégalités] :

Soit f la fonction définie par $f(x) = -2x + 3$.
Pour étudier ses variations l'intervalle $\mathbb{R}$, soient x_1 et x_2 deux réels tels que $x_1......x_2$
On va étudier si appliquer la fonction à x_1 et x_2 change ou ne change pas le sens de l'inégalité.
D'après les règles sur les inégalités, -2 étant négatif on a donc $-2x_1........-2x_2$
Puis $-2x_1 + 3.....-2x_2 + 3$
C'est à dire $f(x_1).....f(x_2)$.
La fonction f a donc changé le sens de l'inégalité, elle est donc .... sur $\mathbb{R}$.

2 Maximum, minimum

Définition :

> Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit x_0 un réel de l'intervalle I.
>
> - La fonction f admet un *maximum* M en x_0 sur l'intervalle I lorsque :
>   - .... ;
>   - pour tout nombre x de I ....
> - La fonction f admet un *minimum* m en x_0 sur l'intervalle I lorsque :
>   - .... ;
>   - pour tout nombre x de I ....
> - On dit que la fonction f admet un *extremum* sur I si elle admet ....

Exemple :
La fonction g précédente semble admettre :

- un minimum ....
- un maximum ....

3 Cas particulier : variations des fonctions affines

Définition :

> Soient a et b deux nombres réels. On appelle fonction *affine* la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
>
> ....

- Si $a > 0$ alors la fonction f est .... sur $]-\infty;+\infty[$;
- si $a = 0$ alors la fonction f est .... sur $]-\infty;+\infty[$;
- si $a < 0$ alors la fonction f est .... sur $]-\infty;+\infty[$.

....

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$f(x)$	.....

.....

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$f(x)$	......

Preuve :

- Si $a > 0$, il s'agit de montrer que si x augmente, alors $f(x)$ ....,
  c'est à dire que si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1)$.........$f(x_2)$.
  Soient donc x_1 et x_2 deux réels tels que x_1.......x_2.
  Alors ax_1........ax_2 et $ax_1 + b$.......$ax_2 + b$
  c'est à dire $f(x_1)$............$f(x_2)$ donc f est strictement .... sur $]-\infty;+\infty[$;
- Si $a = 0$, pour tout x réel, $f(x) = b$ donc f est .... égale à b ;
- si $a < 0$, il s'agit de montrer que si x augmente, alors $f(x)$ ....,
  c'est à dire que si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1)$......$f(x_2)$.
  Soient donc x_1 et x_2 deux réels tels que $x_1 < x_2$.
  Alors on a ax_1.......ax_2 puis $ax_1 + b$.........$ax_2 + b$
  c'est à dire $f(x_1) > f(x_2)$ donc f est strictement .... sur $]-\infty;+\infty[$.

Exemple [Savoir reconnaître les variations d'une fonction affine dont l'écriture algébrique est donnée] :
On considère la fonction f définie par $f(x) = 3 - 2x$.
$f(x) =$................. donc $a =$....... .
Comme a......, la fonction f est strictement .... sur $]-\infty;+\infty[$.