Étude des variations de fonctions, classe de seconde

F.Gaudon

2 juin 2018

Table des matières

1 Propriétés des inégalités (rappels)

Propriétés (rappels sur les propriétés des inégalités) :

Soient a, b, c trois nombres réels :

- si $a \leq b$ alors $a + c \leq b + c$,
  c'est à dire que *le sens de l'inégalité ne change pas*
  lorsque l'*on ajoute le même nombre* dans les deux membres ;
- si $a \leq b$ et $c > 0$ alors $ac \leq bc$,
  c'est à dire que *le sens de l'inégalité ne change pas*
  lorsque l'on *multiplie les deux membres* de l'inégalité par un *même nombre strictement positif* ;
- si $a \leq b$ et $c < 0$ alors $ac \geq bc$,
  c'est à dire que le sens de l'inégalité change
  lorsque l'on *multiplie les deux membres* de l'inégalité par le *même nombre strictement négatif*.

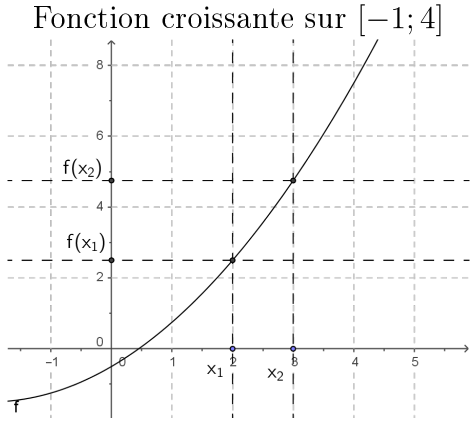
2 Variations de fonctions

Définition :

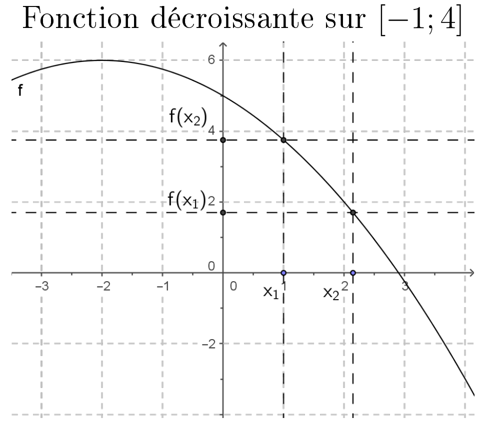
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- La fonction f est dite *croissante* sur l'intervalle I lorsque pour tous x_1 et x_2 réels appartenant à I, si $x_1 \leq x_2$ alors $f(x_1) \leq f(x_2)$, c'est à dire que f *ne change pas* l'ordre des inégalités.
- La fonction f est dite *décroissante* sur l'intervalle I lorsque pour tous x_1 et x_2 réels appartenant à I, si $x_1 \leq x_2$ alors $f(x_1) \geq f(x_2)$, c'est à dire que f *change* l'ordre des inégalités.
- La fonction f est dite *monotone* sur l'intervalle I lorsqu'elle est croissante sur I, ou lorsqu'elle est décroissante sur I.

Fonction croissante sur $[-1;4]$



Fonction décroissante sur $[-1;4]$



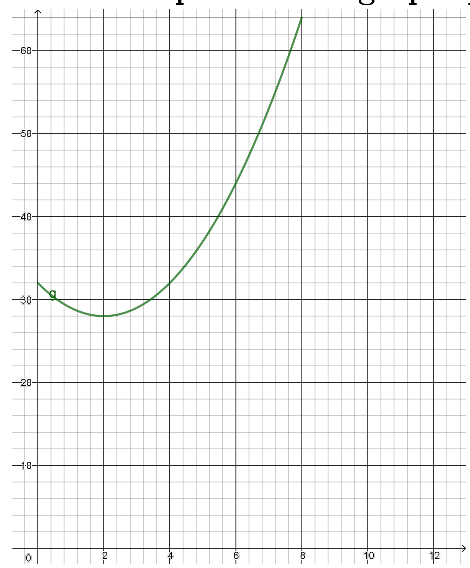
Synthèse :

Pour résumer les variations d'une fonction f on utilise un *tableau de variations* dans lequel apparaissent les intervalles sur lesquels la fonction est monotone.

Exemple [Dresser le tableau de variations d'une fonction par lecture graphique] :

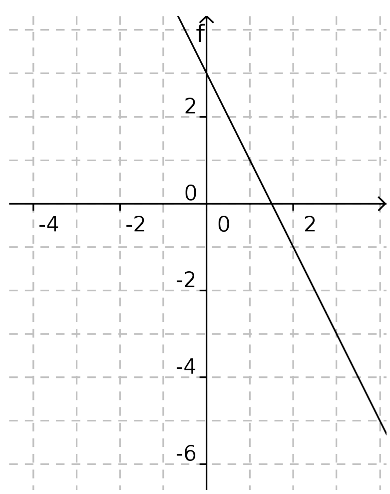
On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0; 8]$ représentée ci-contre. La fonction semble, d'après la représentation graphique, admettre le tableau de variation suivant :

x	0		2		8
$f(x)$	32	$\searrow$	28	$\nearrow$	64



Exemple [Étudier les variations en utilisant des inégalités] :

Soit f la fonction définie par $f(x) = -2x + 3$.
Pour étudier ses variations l'intervalle $\mathbb{R}$, soient x_1 et x_2 deux réels tels que $x_1 \leq x_2$.
On va étudier si appliquer la fonction à x_1 et x_2 change ou ne change pas le sens de l'inégalité.
D'après les règles sur les inégalités, -2 étant négatif on a donc $-2x_1 \geq -2x_2$
Puis $-2x_1 + 3 \geq -2x_2 + 3$
C'est à dire $f(x_1) \geq f(x_2)$.
La fonction f a donc changé le sens de l'inégalité, elle est donc décroissante sur $\mathbb{R}$.



3 Maximum, minimum

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit x_0 un réel de l'intervalle I.

- La fonction f admet un *maximum* M en x_0 sur l'intervalle I lorsque :
  - $M = f(x_0)$;
  - pour tout nombre x de I $f(x) \leq M$.
- La fonction f admet un *minimum* m en x_0 sur l'intervalle I lorsque :
  - $m = f(x_0)$;
  - pour tout nombre x de I $f(x) \geq m$.
- On dit que la fonction f admet un *extremum* sur I si elle admet un maximum ou un minimum.

Exemple :
La fonction g précédente semble admettre 28 comme minimum et 64 comme maximum.

Exemple :
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; 10]$ par $f(x) = -3x^2 + 2$.
Montrons que 2 est un maximum pour la fonction f sur $[0; 10]$.
On a d'abord $f(0) = 2$.
En outre, pour tout réel x de l'intervalle, $f(x) - 2 = -3x^2 + 2 - 2 = -3x^2$.
Or si x est positif, alors $-3x^2$ est négatif.
Donc $f(x) - 2 \leq 0$.
Ce qui montre que $f(x) \leq 2$.
D'où 2 est un maximum pour la fonction f sur l'intervalle $[0; 10]$.

4 Cas particulier : étude des variations des fonctions affines

Définition :

Soient a et b deux nombres réels. On appelle fonction *affine* la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ax + b$$

- Si $a > 0$ alors la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$;
- si $a = 0$ alors la fonction f est constante sur $\mathbb{R}$;
- si $a < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

$a > 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	

$a < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	

Preuve :

- Si $a > 0$, il s'agit de montrer que si x augmente, alors $f(x)$ augmente,
  c'est à dire que si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) < f(x_2)$.
  Soient donc x_1 et x_2 deux réels tels que $x_1 < x_2$.
  Alors $ax_1 < ax_2$ et $ax_1 + b < ax_2 + b$
  c'est à dire $f(x_1) < f(x_2)$ donc f est strictement croissante sur $]-\infty; +\infty[$;
- Si $a = 0$, pour tout x réel, $f(x) = b$ donc f est constante égale à b ;
- si $a < 0$, il s'agit de montrer que si x augmente, alors $f(x)$ diminue,
  c'est à dire que si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) > f(x_2)$.
  Soient donc x_1 et x_2 deux réels tels que $x_1 < x_2$.
  Alors on a $ax_1 > ax_2$ puis $ax_1 + b > ax_2 + b$
  c'est à dire $f(x_1) > f(x_2)$ donc f est strictement décroissante sur $]-\infty; +\infty[$.

Exemple [Savoir reconnaître les variations d'une fonction affine dont l'écriture algébrique est donnée] :

On considère la fonction f définie par $f(x) = 3 - 2x$.
$f(x) = 3 + (-2x) = -2x + 3$ donc $a = -2$.
Comme $a < 0$, la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty; +\infty[$.