Résolution d'inéquations et fonctions, classe de seconde

F.Gaudon

3 juin 2018

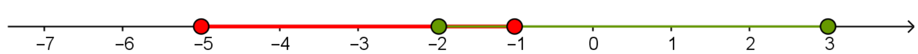
Table des matières

1 Compléments sur les intervalles

Définition :

Soient I et J deux intervalles.
- *L'intersection* de I et J notée $I \cap J$ est l'ensemble des nombres qui appartiennent à la fois à I *et* à J.
- *La réunion* de I et J notée $I \cup J$ est l'ensemble des nombres qui appartiennent à I *ou* à J, c'est à dire, soit à I, soit à J, soit aux deux.
- Lorsque les intervalles I et J n'ont aucun point commun, leur intersection est *l'ensemble vide* noté $\emptyset$. On dit aussi que les intervalles sont *disjoints*.

Exemple [Savoir déterminer l'intersection et la réunion de deux intervalles] :



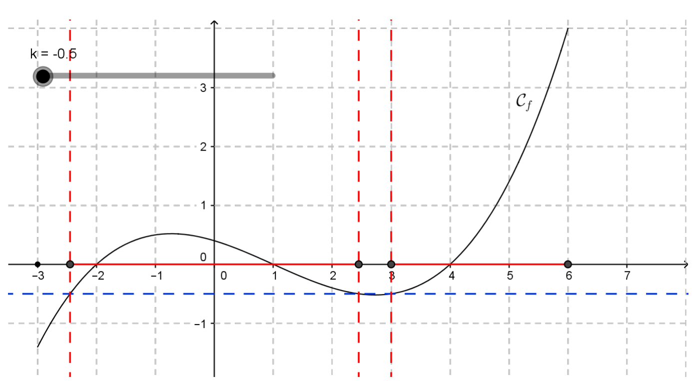
Soit $I = [-5; -1]$ et $J = [-2; 3]$.
L'intersection $I \cap J$ est $[-2; -1]$.
La réunion $I \cup J$ est $[-5; 3]$.

2 Résolutions graphiques d'inéquations

Propriété :

Soit k un nombre réel, f une fonction et $\mathcal{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère. Les *solutions de l'inéquation* $f(x) \leq k$ (respectivement $f(x) \geq k$) sont les *abscisses* des points de la courbe situés en dessous (respectivement au dessus) de la droite parallèle à l'axe des abscisses et passant par le point de coordonnées $(0; k)$.

Exemple [Savoir lire graphiquement les solutions d'une inéquation] :
Sur la figure ci-contre, est représentée la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-3; 6]$:

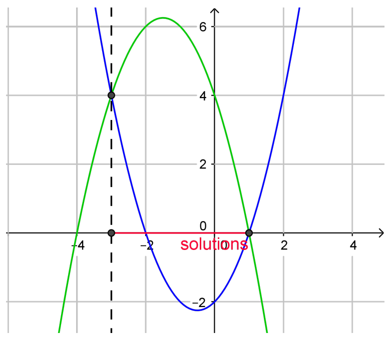


L'inéquation $f(x) \geq -0,5$ a pour ensemble de solutions $[-2,5;2,5]\cup]3;6]$ environ.

Propriété :

Soient f et g deux fonctions et $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ leur représentation graphique dans un repère. Les *solutions de l'inéquation* $f(x) \leq g(x)$ sont les *abscisses* des points de la courbe $\mathcal{C}_f$ situés en dessous des points de $\mathcal{C}_g$ de même abscisse.

Exemple :



Ci-dessus, $\mathcal{C}_f$ est la courbe bleue et $\mathcal{C}_g$ est la courbe verte. L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \leq g(x)$ semble être [-3 ; 1].

3 Étude de signe de fonctions

Définition :

Soient a et b deux nombres réels. On appelle fonction *affine* la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

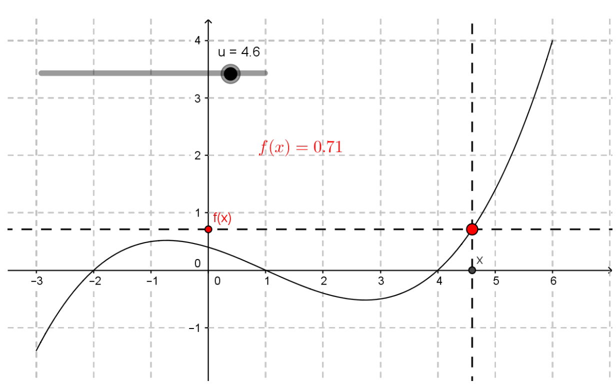
$$f(x) = ax + b$$

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est :

- *positive* sur I si pour tout réel x de I, $f(x) \geq 0$;
- *négative* sur I si pour tout réel x de I, $f(x) \leq 0$.

Exemple [Dresser le tableau de signe d'une fonction par lecture graphique] :



Pour visualiser le signe d'une fonction, on utilise un *tableau de signes* :

x	-3		-2		1		4		6
$f(x)$		-	0	+	0	-	0	+	

4 Cas particulier : étude du signe des fonctions affines

4.1 Propriétés des inégalités (rappels)

Propriétés (rappels sur les propriétés des inégalités) :

Soient a, b, c trois nombres réels :

- si $a \leq b$ alors $a + c \leq b + c$,
  c'est à dire que *le sens de l'inégalité ne change pas*
  lorsque l'*on ajoute le même nombre* dans les deux membres ;
- si $a \leq b$ et $c > 0$ alors $ac \leq bc$,
  c'est à dire que *le sens de l'inégalité ne change pas*
  lorsque l'on *multiplie les deux membres* de l'inégalité par un *même nombre strictement positif* ;
- si $a \leq b$ et $c < 0$ alors $ac \geq bc$,
  c'est à dire que le sens de l'inégalité change
  lorsque l'on *multiplie les deux membres* de l'inégalité par le *même nombre strictement négatif*.

4.2 Étude de signe de fonctions affines

Définition :

Soient a et b deux nombres réels. On appelle fonction *affine* la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ax + b$$

Propriété :

Si $a \neq 0$, les deux cas possibles sont résumés dans les tableaux de signe suivants :

si $a > 0$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
signe de $ax+b$		-	0	+	

si $a < 0$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
signe de $ax+b$		+	0	-	

Preuve :
$f(x) > 0$ signifie $ax + b > 0$
c'est à dire $ax > -b$ ou encore
si $a < 0$, $x < -\frac{b}{a}$
et, si $a > 0$, $x > -\frac{b}{a}$.
D'où les tableaux de signe.

Exemple [Savoir dresser le tableau de signe d'une fonction affine] :
Soit f la fonction définie par $f(x) = -2x + 3$.

- On résout l'équation $f(x) = 0$ pour savoir pour quelle valeur de x, $f(x)$ s'annule :
  $f(x) = 0$ équivaut à $-2x + 3 = 0$ c'est à dire à $-2x = -3$ donc $x = \frac{-3}{-2}$ ou encore $x = \frac{3}{2}$.

- On dresse le tableau de signe :

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	-	