Généralités sur les fonctions, classe de seconde

F.Gaudon

11 juin 2018

Table des matières

1 Généralités sur les fonctions

Définition :

- Une *fonction* est un procédé qui permet d'associer à tout nombre x, élément d'un ensemble E « de départ » , un nombre unique noté $f(x)$.
- L'ensemble E est *l'ensemble de définition* de la fonction f.
- Le nombre $f(x)$ est appelé *l'image* du nombre x par la fonction f.
- Le nombre x est appelé *l'antécédent* du nombre $f(x)$.

Exemple [Savoir calculer l'image d'un réel par une fonction] :

- Soit g la fonction définie pour tout réel x par $g(x) = x^2 - 4x + 32$.
  On a $g(-5) = (-5)^2 - 4 \times (-5) + 32 = 25 + 20 + 32 = 77$
  -5 a donc pour image 77 par la fonction g ce qui signifie aussi que -5 est un antécédent de 77 par la fonction g.
- Soit h la fonction définie pour tout réel x par $h(x) = 3x + 5$.
  L'antécédent x de 6 par h vérifie l'équation $h(x) = 6$ c'est à dire $3x + 5 = 6$
  donc $3x = 1$ c'est à dire $x = \frac{1}{3}$.
  $\frac{1}{3}$ est donc l'unique antécédent de 6 par la fonction h.

Remarque :

On peut calculer l'image de n'importe quel nombre réel appartenant à l'ensemble de définition d'une fonction donnée lorsque l'on connaît une expression algébrique de la fonction mais on n'est pas en mesure de déterminer n'importe quel antécédent car on ne sait résoudre que certaines équations.

Exemple [Savoir programmer une fonction en langage python] :

Définition de la fonction $g : x \mapsto x^2 - 4x + 32$:

```
def g(x):
        return x**2-4*x+32
```

Tableaux de valeurs : :

Pour présenter des nombres et leurs images par une fonction, on utilise un *tableau de valeurs*.

Exemple [Savoir dresser un tableau de valeurs d'une fonction] :

Par exemple pour la fonction g définie par $g(x) = x^2 - 4x + 32$:

x	0	1	2	3	4
$g(x)$	32	29	28	29	32

2 Intervalles de nombres réels

Définition :

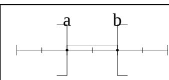
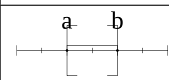
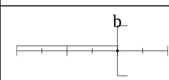
On appelle ensemble des nombres *réels*, noté $\mathbb{R}$, l'ensemble des abscisses des points de toute droite graduée (par exemple 1, -3, $\sqrt{2}$, π, etc.) ;

Définitions :

Soient a et b deux nombres réels avec a inférieur strictement à b.

- $[a;b]$ est l'ensemble des réels x tels que $a \leq x \leq b$. On l'appelle *intervalle fermé* d'extrémités a et b.
- $]a;b[$ est l'ensemble des réels x tels que $a < x < b$. On l'appelle *intervalle ouvert* d'extrémités a et b.
- $[a;b[$ est l'ensemble des réels x tels que $a \leq x < b$. Cet intervalle est dit *ouvert* en b et *fermé* en a.
- $[a;+\infty[$ est l'ensemble des réels x tels que $x \geq a$.
- $]-\infty;b[$ est l'ensemble des réels x tels que $x < b$.

Exemples de représentation sur une droite graduée :

$]a;b[$	
$[a;b]$	
$]-\infty;b[$	

3 Transformations d'écritures

Propriété :

Pour tous les nombres réels a, b et k :

$$k(a+b) = ka + kb$$

Pour tous les nombres réels a, b, c et d :

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

forme factorisée, produit *forme développée, somme*

Propriété :

Pour tous les nombres réels a et b on a les *identités remarquables* suivantes :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

forme factorisée, produit *forme développée, somme*

Exemples [Savoir développer une écriture littérale] :

- Pour tout réel x, $A(x) = (2x+4)(x-5) = 2x \times x + 4x - 2x \times 5 - 20$ par la double distributivité
  Donc $A(x) = 2x^2 + 4x - 10x - 20 = 2x^2 - 6x - 20$
- Pour tout réel x, $B(x) = (x-2)^2 + 28 = x^2 - 2 \times 2 \times x + 2^2 + 28$ d'après l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
  Donc $B(x) = x^2 - 4x + 32 = g(x)$

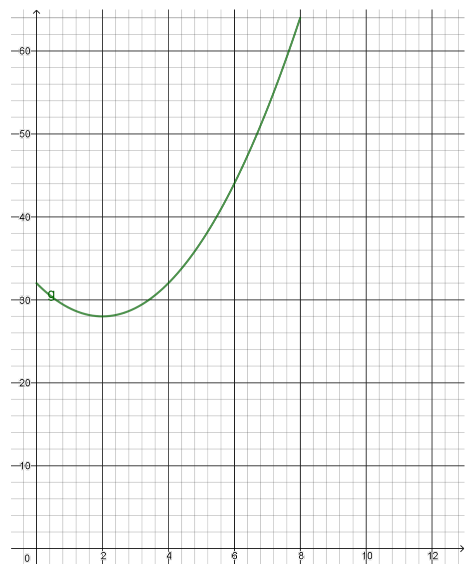
4 Représentation graphique

Définition : représentation graphique :

- Soit f une fonction définie sur un ensemble E de $\mathbb{R}$. On appelle *courbe représentative* ou *représentation graphique* de la fonction f l'ensemble des points M du plan de coordonnées $(x; f(x))$ dans un repère du plan avec x parcourant l'ensemble de définition E .
- Un point M de coordonnées $(x; y)$ appartient donc à la courbe si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation $y = f(x)$ appelée *équation de la courbe représentative* $\mathcal{C}_f$ de la fonction f.

Exemple [Savoir tracer la courbe représentative d'une fonction] :

Soit $\mathcal{C}$ la représentation graphique de la fonction g définie par $g(x) = x^2 - 4x + 32$ sur l'intervalle $[0; 8]$. D'après le tableau de valeurs vu plus haut, les points M_1, M_2, M_3 de coordonnées respectives $(0; 32)$, $(1; 29)$, $(4; 32)$ sont des points de la courbe représentative de la fonction g.
D'où la représentation graphique :



Propriété :

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative d'une fonction f.

- L'image $f(x)$ d'un nombre x par f se lit sur l'axe des ordonnées : c'est l'ordonnée du point d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ avec la droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par le point de coordonnées $(x; 0)$;
- les antécédents s'il y en a de tout nombre y par f se lisent sur l'axe des abscisses : ce sont les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ avec la droite parallèle à l'axe des abscisses et passant par le point de coordonnées $(0; y)$.

Exemple [Savoir lire graphiquement des images et des antécédents] :

Sur la courbe ci-dessus représentant la fonction g,

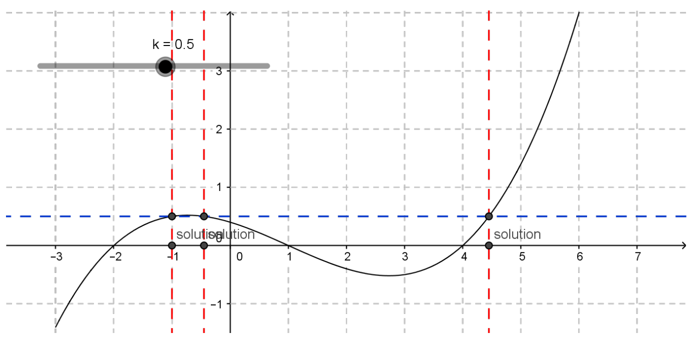
- l'image de 1 est 29 ;
- 32 a deux antécédents qui sont 0 et 4.

5 Résolution graphique d'équations

Propriété :

Soit k un nombre réel, f une fonction et $\mathcal{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère. Les *solutions de l'équation* $f(x) = k$ sont les *abscisses* des points d'intersection de la courbe avec la droite parallèle à l'axe des abscisses et passant par le point de coordonnées $(0; k)$.

Exemple [Savoir lire graphiquement les solutions d'une équation] :
Sur la figure ci-dessous, est représentée une fonction f :

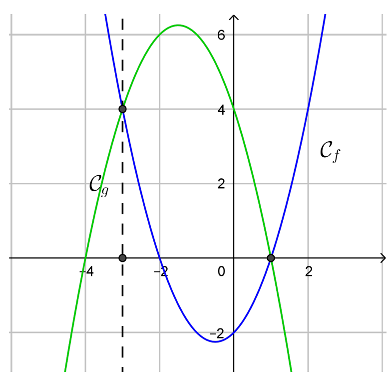


Les solutions de l'équation $f(x) = 0,5$ sont environ -1 ; -0,5 et 4,5.

Propriété :

Soient f et g deux fonctions et $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ leur représentation graphique dans un repère. Les *solutions de l'équation* $f(x) = g(x)$ sont les *abscisses* des points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de la courbe $\mathcal{C}_g$.

Exemple [Savoir lire graphiquement les solutions d'une équation] :



Ci-dessus, $\mathcal{C}_f$ est la courbe bleue et $\mathcal{C}_g$ est la courbe verte. L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ semble être {-3 ; 1}.