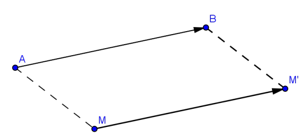
Vecteurs, cours de seconde

1 Translation et vecteur

Propriété et définition :

Soit A et B deux points du plan. À tout point M du plan on associe le point M' tel $ABM'M$ est un parallélogramme (éventuellement aplati). M' est *l'image* de M par .... On dit alors que M' est l'image de M par .... On dit aussi que $\vec{MM'}$ et $\vec{AB}$ sont .... et on note .... On notera aussi $\vec{u}$ tout vecteur tel que $\vec{u} = \vec{AB} = \vec{MM'}$.



Remarque :

Deux vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{A'B'}$ sont donc égaux si et seulement si les trois conditions suivantes sont vraies :

- les droites (AB) et $(A'B')$ sont .... : on dit qu'elles ont la même ....;
- le .... de A vers B est le même que de A' vers B' ;
- les segments $[AB]$ et $[A'B']$ ont même .... : on dit qu'ils ont la même ....

Définition :

Soit A et B deux points du plan. On appelle :

- *vecteur opposé* au vecteur $\vec{AB}$ le vecteur .... On note ....
- .... le vecteur $\vec{AA}$ ou $\vec{BB}$. On note $\vec{AA} = \vec{BB} =$...... .

Propriété :

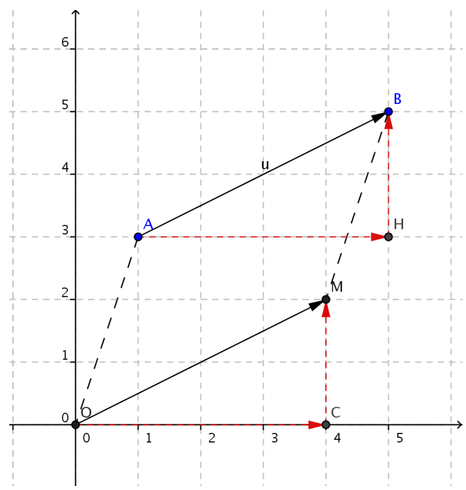
Soit A, B et M trois points. M est le milieu de $[AB]$ si et seulement si ....

2 Coordonnées de vecteurs

Définition :

Soit $(O; I; J)$ un repère du plan.

- On considère les vecteurs $\vec{i} = \vec{OI}$ et $\vec{j} = \vec{OJ}$. Le repère $(O; I; J)$ est aussi noté $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
- Soit $\vec{u}$ un vecteur. On appelle *coordonnées du vecteur* $\vec{u}$ dans le repère $(O; I; J)$, les coordonnées de l'unique point M tel que ....



Exemple :

[Lecture graphique de coordonnées de vecteurs]

Sur la figure ci-dessus, A a pour coordonnées .... et B a pour coordonnées .... Les coordonnées du point M tel que .... sont .... Les coordonnées du vecteur $\vec{AB}$ sont donc ....

Remarque :

Les coordonnées de vecteurs peuvent être notées verticalement : $\vec{u}(x_{\vec{u}}; y_{\vec{u}})$ s'écrit ainsi aussi $\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$.

Propriété :

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont égaux si et seulement si ....

Preuve :

Soient A et B deux points tels que $\vec{AB} = \vec{u}$ et C et D deux points tels que $\vec{CD} = \vec{v}$. Soit M le point tel que $\vec{OM} = \vec{AB}$ et N le point tel que $\vec{ON} = \vec{CD}$. Alors $\vec{u} = \vec{v}$ si et seulement si $\vec{AB} = \vec{CD}$ c'est à dire $\vec{OM} = \vec{ON} = \vec{AB}$ c'est à dire encore M et N sont confondus ce qui signifie qu(ils ont les mêmes coordonnées dans le repère $(O; I; J)$.

Propriété :

> Soient A et B deux points de coordonnées $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$ dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Alors les coordonnées de $\vec{AB}$ sont
>
> ...
>
> .

Exemple :

[Calcul des coordonnées d'un point vérifiant une égalité vectorielle]

Soient A, B et C les points de coordonnées respectives $(-2; 3)$, $(2; 1)$ et $(1; 4)$ dans un repère du plan.

Cherchons les coordonnées du point D tel que $\vec{BA} = \vec{CD}$

$\vec{BA}$ a pour coordonnées ....

c'est à dire ....

donc ....

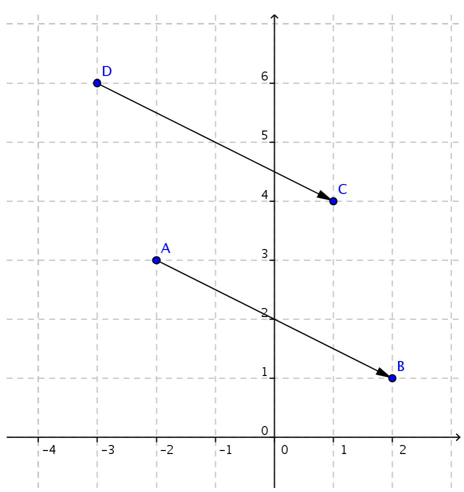
Le vecteur $\vec{CD}$ a lui pour coordonnées ....

Les deux vecteurs sont égaux si et seulement si leurs coordonnées sont égales c'est à dire .... et ....

d'où .... et ....

donc .... et ....

D a donc pour coordonnées ....



Algorithmique :

- Algorithme de calcul des coordonnées $(x_{AB}; y_{AB})$ du vecteur $\vec{AB}$ dont les extrémités A et B ont pour coordonnées $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$:
- Algorithme de test de l'égalité de deux vecteurs $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ dont les coordonnées (x_1, y_1) et $(x_2; y_2)$ sont données :

Entrées : .....
Début traitement
  Affecter à x_{AB} la valeur .... ;
  Affecter à y_{AB} la valeur .... ;
Fin
Sorties : x_{AB}, y_{AB}.

Entrées : x_1, y_1, x_2, y_2 ;
Début traitement
  si .... **alors**
    Afficher *vecteurs égaux* ;
  sinon
    Afficher *vecteurs pas égaux* ;
  fin
Fin

3 Somme de vecteurs

3.1 Relation de Chasles

Définition :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et A, B et C trois points tels que $\vec{u} = \vec{AB}$ et $\vec{v} = \vec{BC}$.

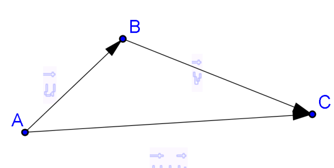
La *somme des vecteurs* $\vec{u}$ et $\vec{v}$, notée $\vec{u} + \vec{v}$, est le vecteur .... résultant de l'enchaînement des translations de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Propriété (relation de CHASLES) :

Pour tous les points A, B et C on a donc

.....

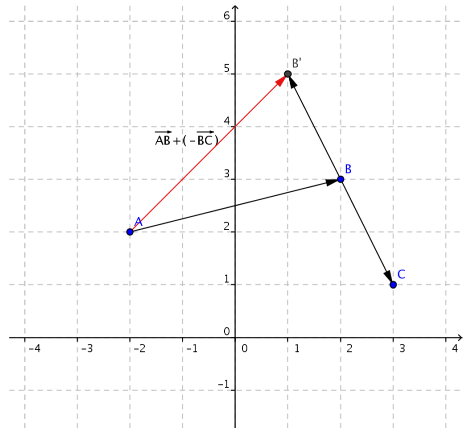
.



3.2 Différence de deux vecteurs

Définition :

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs. On appelle *différence* du vecteur $\vec{u}$ par le vecteur $\vec{v}$ le vecteur noté $\vec{u} - \vec{v}$ égale à ....



3.3 Coordonnées de sommes de vecteurs

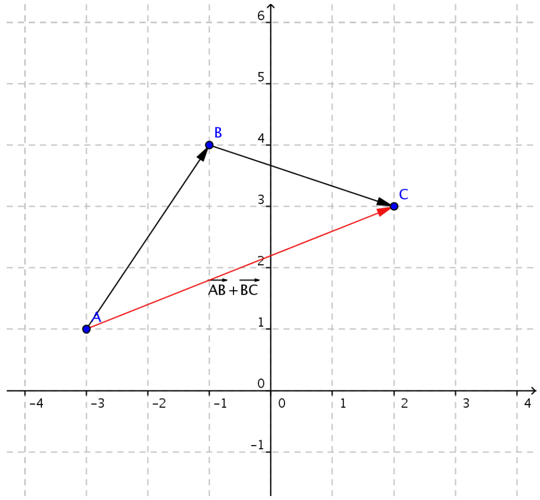
Propriétés :

Soit $(O;\vec{i};\vec{j})$ un repère du plan. On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées $(x_{\vec{u}};y_{\vec{u}})$ et $(x_{\vec{v}};y_{\vec{v}})$.

- $-\vec{u}$ a pour coordonnées .... ;
- $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées .... ;

Preuve :

- soient A et B sont deux points tels que $\vec{u} = \vec{AB}$. Les coordonnées de $\vec{u}$ sont donc .... Or $\vec{BA} = -\vec{u}$ et a pour coordonnées .... qui sont opposées à celles de $\vec{u}$;
- Soient A, B et C trois points tels que $\vec{u} = \vec{AB}$ et $\vec{v} = \vec{BC}$. D'après la relation de Chasles on peut écrire que $\vec{u}+\vec{v} = \vec{AB}+\vec{BC} =$ .... Or les abscisses de $\vec{AB}$ et $\vec{BC}$ sont respectivement $x_B - x_A$ et $x_C - x_B$. Leur somme est .... qui est l'abscisse de .... De même pour les ordonnées.



Exemples de calculs sur les coordonnées de sommes :

- [Calcul de coordonnées de sommmes de vecteurs]
  Soient A, B et C trois points du plan de coordonnées respectives $(-3;1)$, $(1,4)$ et $(2;3)$. Alors le vecteur $\vec{AB}$ a pour coordonnées $(2;3)$, le vecteur $\vec{BC}$ a pour coordonnées $(3;-1)$. On peut vérifier que $\vec{AC}$ a pour coordonnées .... soit ....
- [Calcul de coordonnées de points vérifiant une égalité vectorielle avec une somme]
  Soient $A(-3;1)$ et $B(1;4)$.
  On cherche les coordonnées du point M tel que $\vec{MA}+\vec{MB}=\vec{0}$.
  $\vec{MA}$....................... donc ....
  $\vec{MB}$....................... donc ....
  D'où $\vec{MA}+\vec{MB}$.................
  donc $\vec{MA}+\vec{MB}$.........
  De la contrainte $\vec{MA}+\vec{MB}=\vec{0}$ on déduit :
  .... et ....
  c'est à dire .... et ....
  D'où .... et ....
  D'où M(....................).

Exemple de calcul vectoriel :

Soient A, B et C trois points du plan.Soit $\vec{u}=\vec{AB}-\vec{AC}+\vec{BC}$.

Alors $\vec{u}=$ ......

D'où $\vec{u}=$ ....

Donc $\vec{u}=$ ....

et $\vec{u}=$ ....