Vecteurs, cours pour la classe de seconde

F.Gaudon

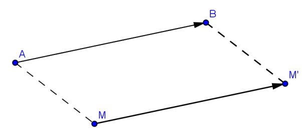
17 juin 2017

Table des matières

1 Notion de vecteur

Propriété et définition :

Soit A et B deux points du plan. À tout point M du plan on associe le point M' tel $ABM'M$ est un parallélogramme (éventuellement aplati). M' est *l'image* de M par la *translation* qui amène A en B. On dit alors que M' est l'image de M par la *translation de vecteur* $\vec{AB}$. On dit aussi que $\vec{MM'}$ et $\vec{AB}$ sont deux *vecteurs égaux* et on note $\vec{AB} = \vec{MM'}$. On notera aussi $\vec{u}$ tout vecteur tel que $\vec{u} = \vec{AB} = \vec{MM'}$.



Remarque :
Deux vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{A'B'}$ sont donc égaux si et seulement si les trois conditions suivantes sont vraies :
- les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles : on dit qu'elles ont la même *direction*;
- le *sens* de A vers B est le même que de A' vers B' ;
- les segments $[AB]$ et $[A'B']$ ont même longueur : on dit qu'ils ont la même *norme*.

Définition :

Soit A et B deux points du plan. On appelle :
- *vecteur opposé* au vecteur $\vec{AB}$ le vecteur $\vec{BA}$. On note $-\vec{AB} = \vec{BA}$.
- *vecteur nul*, le vecteur $\vec{AA}$ ou $\vec{BB}$. On note $\vec{AA} = \vec{BB} = \vec{0}$.

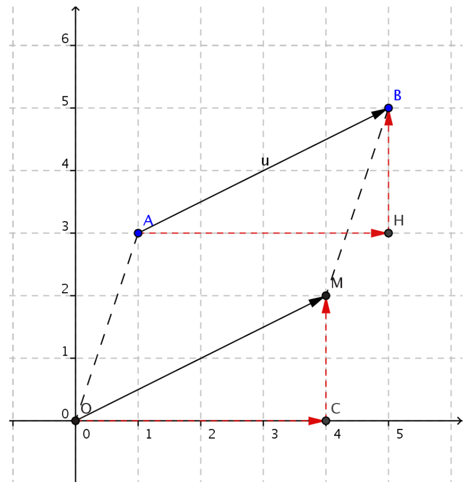
Propriété :

Soit A, B et M trois points. M est le milieu de $[AB]$ si et seulement si $\vec{AM} = \vec{MB}$.

2 Coordonnées de vecteurs

Définition :

Soit $(O; I; J)$ un repère du plan.
- On considère les vecteurs $\vec{i} = \vec{OI}$ et $\vec{j} = \vec{OJ}$. Le repère $(O; I; J)$ est aussi noté $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
- Soit $\vec{u}$ un vecteurs. On appelle *coordonnées du vecteur* $\vec{u}$ dans le repère $(O; I; J)$, les coordonnées de l'unique point M tel que $\vec{OM} = \vec{u}$.



Exemple :
Sur la figure ci-dessus, A a pour coordonnées $(1;3)$ et B a pour coordonnées $(5;5)$. Les coordonnées du point M tel que $\vec{OM} = \vec{AB}$ sont $(4;2)$. Les coordonnées du vecteur $\vec{AB}$ sont donc $(4;2)$

Remarque :
Les coordonnées de vecteurs peuvent être notées verticalement : $\vec{u}(x_{\vec{u}}; y_{\vec{u}})$ s'écrit ainsi aussi $\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$.

Propriété :

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coordonnées dans un repère.

Preuve :
Soient A et B deux points tels que $\vec{AB} = \vec{u}$ et C et D deux points tels que $\vec{CD} = \vec{v}$. Soit M le point tel que $\vec{OM} = \vec{AB}$ et N le point tel que $\vec{ON} = \vec{CD}$. Alors $\vec{u} = \vec{v}$ si et seulement si $\vec{AB} = \vec{CD}$ c'est à dire $\vec{OM} = \vec{ON} = \vec{AB}$ c'est à dire encore M et N sont confondus ce qui signifie qu(ils ont les mêmes coordonnées dans le repère $(O; I; J)$.

Propriété :

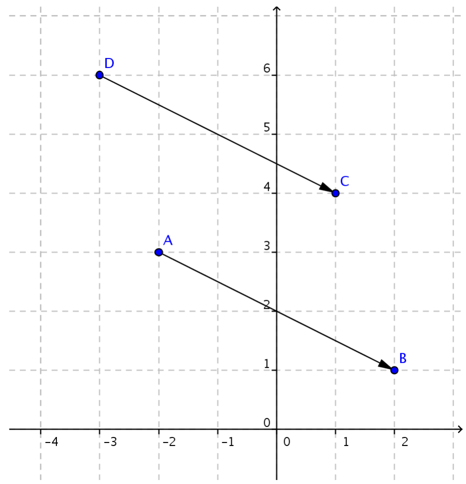
Soient A et B deux points de coordonnées $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$ dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Alors les coordonnées de $\vec{AB}$ sont :

$$(x_B - x_A; y_B - y_A)$$

Exemples :

- [Calculer les coordonnées d'un vecteur connaissant les coordonnées des extrémités]
  Soient E et F les points de coordonnées respectives $(-1;3)$ et $(6;-3)$ dans un repère.
  On a $x_{\vec{EF}} = x_F - x_E = 6 - (-1) = 7$
  $y_{\vec{EF}} = y_F - y_E = -3 - 3 = -6$
  D'où $\vec{EF}(7;-6)$

- [Calcul de coordonnées de points vérifiant une égalité vectorielle]
  Soient A, B et C les points de coordonnées respectives $(-2;3)$, $(2;1)$ et $(1;4)$ dans un repère du plan.
  Cherchons les coordonnées du point D tel que $\vec{BA} = \vec{CD}$ Or $\vec{BA}$ a pour coordonnées $(x_A - x_B; y_A - y_B)$ c'est à dire $((-2) - 2; 3 - 1)$ donc $(-4; 2)$.
  Le vecteur $\vec{CD}$ a lui pour coordonnées $(x_D - 1; y_D - 4)$.
  Les deux vecteurs sont égaux si et seulement si leurs coordonnées sont égales
  c'est à dire $-4 = x_D - 1$ et $2 = y_D - 4$
  d'où $x_D = -4 + 1$ et $y_D = 4 + 2$
  donc $x_D = -3$ et $y_D = 6$.
  D a donc pour coordonnées $(-3; 6)$.



Algorithmique :

- Algorithme de calcul des coordonnées $(x_{AB}; y_{AB})$ du vecteur $\vec{AB}$ dont les extrémités A et B ont pour coordonnées $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$:

Entrées : x_A, y_A, x_B, y_B ;
Début traitement
  Affecter à x_{AB} la valeur $x_B - x_A$;
  Affecter à y_{AB} la valeur $y_B - y_A$;
Fin
Sorties : x_{AB}, y_{AB}.

- Algorithme de test de l'égalité de deux vecteurs $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ dont les coordonnées (x_1, y_1) et $(x_2; y_2)$ sont données :

Entrées : x_1, y_1, x_2, y_2 ;
Début traitement
  si *(*$x_1 = x_2$*) et (*$y_1 = y_2$*)* **alors**
    Afficher *vecteurs égaux* ;
  sinon
    Afficher *vecteurs pas égaux* ;
  fin
Fin

3 Somme de vecteurs

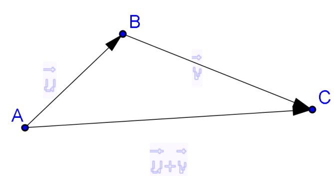
3.1 Relation de Chasles

Définition :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et A, B et C trois points tels que $\vec{u} = \vec{AB}$ et $\vec{v} = \vec{BC}$.
La *somme des vecteurs* $\vec{u}$ et $\vec{v}$, notée $\vec{u} + \vec{v}$, est le vecteur $\vec{AC}$ résultant de l'enchaînement des translations de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Propriété (relation de CHASLES) :

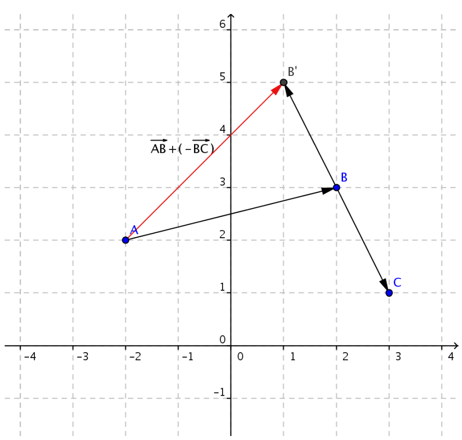
Pour tous les points A, B et C on a donc $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$.



3.2 Différence de deux vecteurs

Définition :

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs. On appelle *différence* du vecteur $\vec{u}$ par le vecteur $\vec{v}$ le vecteur noté $\vec{u} - \vec{v}$ égale à $\vec{u} + (-\vec{v})$.



3.3 Coordonnées de sommes de vecteurs

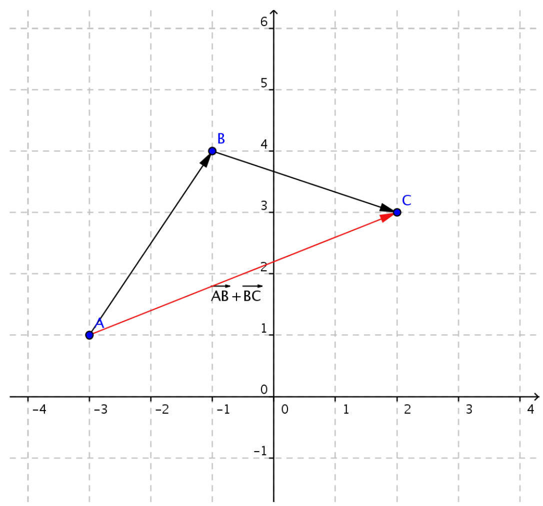
Propriétés :

Soit $(O;\vec{i};\vec{j})$ un repère du plan. On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées $(x_{\vec{u}};y_{\vec{u}})$ et $(x_{\vec{v}};y_{\vec{v}})$.

- $-\vec{u}$ a pour coordonnées $(-x_{\vec{u}};-y_{\vec{v}})$
- $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $(x_{\vec{u}}+x_{\vec{v}};y_{\vec{u}}+y_{\vec{v}})$;

Preuve :

- soient A et B sont deux points tels que $\vec{u}=\vec{AB}$. Les coordonnées de $\vec{u}$ sont donc $(x_B-x_A;y_B-y_A)$. Or $\vec{BA}=-\vec{u}$ et a pour coordonnées $(x_A-x_B;y_A-y_B)$ qui sont opposées à celles de $\vec{u}$;
- Soient A, B et C trois points tels que $\vec{u}=\vec{AB}$ et $\vec{v}=\vec{BC}$. D'après la relation de Chasles on peut écrire que $\vec{u}+\vec{v}=\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{AC}$. Or les abscisses de $\vec{AB}$ et $\vec{BC}$ sont respectivement x_B-x_A et x_C-x_B. Leur somme est $x_B-x_A+x_C-x_B=x_C-x_A$ qui est l'abscisse de $\vec{AC}$. De même pour les ordonnées.



Exemples de calculs sur les coordonnées de sommes :

- Soient A, B et C trois points du plan de coordonnées respectives $(-3;1)$, $(1,4)$ et $(2;3)$. Alors le vecteur $\vec{AB}$ a pour coordonnées $(2;3)$, le vecteur $\vec{BC}$ a pour coordonnées $(3;-1)$. On peut vérifier que $\vec{AC}$ a pour coordonnées $(2+3;3-1)$ soit $(5;2)$.
- Soient $A(-3;1)$ et $B(1;4)$.
  On cherche les coordonnées du point M tel que $\vec{MA}+\vec{MB}=\vec{0}$.
  $\vec{MA}(x_A-x_M;y_A-y_M)$ donc $\vec{MA}(-3-x_M;1-y_M)$.
  $\vec{MB}(x_B-x_M;y_B-y_M)$ donc $\vec{MB}(1-x_M;4-y_M)$.
  D'où $\vec{MA}+\vec{MB}(-3-x_M+1-x_M;1-y_M+4-y_M)$
  donc $\vec{MA}+\vec{MB}(-2-2x_M;5-2y_M)$.
  De la contrainte $\vec{MA}+\vec{MB}=\vec{0}$ on déduit :
  $-2-2x_M=0$ et $5-2y_M=0$
  c'est à dire $-2=2x_M$ et $5=2y_M$
  D'où $x_M=1$ et $y_M=\frac{5}{2}$.
  D'où $M(-1;\frac{5}{2})$.

Exemple de calcul vectoriel :
Soient A, B et C trois points du plan.
Alors $\vec{u} = \vec{AB} - \vec{AC} + \vec{BC} = \vec{AB} + \vec{CA} + \vec{BC}$ d'après la définition de vecteurs opposés.
D'où $\vec{u} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA}$
Donc $\vec{u} = \vec{AC} + \vec{CA}$ d'après la relation de Chasles
et $\vec{u} = \vec{AA} = \vec{0}$ d'après la relation de Chasles à nouveau.