Produit d'un vecteur par un nombre réel, cours pour la classe de seconde

F.Gaudon

17 juin 2017

Table des matières

1 Produit d'un vecteur par un nombre réel

Définition :

Soit $(O;\vec{i};\vec{j})$ un repère du plan. Soit $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans ce repère. Soit k un nombre réel. On appelle *vecteur produit de $\vec{u}$ par k*, le vecteur de coordonnées $(kx;ky$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Exemple de calcul de coordonnées de vecteur :
Soient $\vec{u}(2;3)$ et $\vec{v}(4;5)$. Soit $\vec{w}=-6\vec{u}+5\vec{v}$.
Alors $-6\vec{u}$ a pour coordonnées $(-12;-18)$
et $5\vec{v}$ a pour coordonnées $(20;25)$.
D'où $\vec{w}(-12+20;-18+25)$ donc $\vec{w}(8;7)$.

Exemple de calcul des coordonnées d'un point vérifiant une égalité vectorielle :
Soient $A(3;-5)$ et $B(1;4)$.
On considère le point M tel que $4\vec{MA}=5\vec{AB}$.
• On a d'une part, $\vec{AB}(x_B-x_A;y_B-y_A)$ donc $\vec{AB}(1-3;4-(-5))$ c'est à dire $\vec{AB}(-2;9)$.
D'où $5\vec{AB}(-10;45)$.
• D'autre part, $\vec{MA}(3-x_M;-5-y_M)$ d'où $4\vec{MA}(4(3-x);4(-5-y_M))$ donc $4\vec{MA}(12-4x;-20-4y_M)$
• De $3\vec{MA}=5\vec{AB}$ on déduit donc :
$12-4x=-10$ et $-20-4y_M=45$.
D'où $-4x=-22$ et $-4y_M=65$
et $x_M=\frac{22}{4}$ et $y_M=\frac{-65}{4}$

Propriétés :

Soient k, k' deux nombres réels et $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs.

- $k\vec{u}+k'\vec{u}=(k+k')\vec{u}$
- $k(k'\vec{u})=(kk')\vec{u}$
- $k(\vec{u}+\vec{v})=k\vec{u}+k\vec{v}$
- $k\vec{u}=0$ si et seulement si $k=0$ ou $\vec{u}=\vec{0}$

Preuve :
Soient $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ les coordonnées de $\vec{u}$ dans $(O;\vec{i};\vec{j})$. Alors le vecteur $k\vec{u}$ a par définition pour coordonnées $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$, le vecteur $k'\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} k'x \\ k'y \end{pmatrix}$, le vecteur $k\vec{u}+k'\vec{u}$ a donc pour coordonnées $\begin{pmatrix} kx+k'x \\ ky+k'y \end{pmatrix}$ ce qui s'écrit aussi $\begin{pmatrix} (k+k')x \\ (k+k')y \end{pmatrix}$. On reconnaît les coordonnées de $(k+k')\vec{u}$ ce qui démontre la première propriété. Les autres propriétés se démontrent de la même manière.

Exemples :

- [Simplification de l'expression d'un vecteur pour placer un point] :
  Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.
  $3(\vec{u}+2\vec{v})-5\vec{u}+3\vec{v}=3\vec{u}+6\vec{v}-5\vec{u}+3\vec{v}$
  $=3\vec{u}+6\vec{v}-5\vec{u}+3\vec{v}$
  $=-2\vec{u}+9\vec{v}$

- [Simplification de l'expression d'un vecteur pour permettre le placement d'un point]
  Soient A, B et C trois points et $\vec{u}$ tel que $\vec{u}=3\vec{AC}+3\vec{CB}-\vec{BA}$.
  Alors :
  $\vec{u}=3(\vec{AC}+\vec{CB})-\vec{BA}$
  donc $\vec{u}=3\vec{AB}-\vec{BA}$
  d'où $\vec{u}=3\vec{AB}+\vec{AB}$
  et $\vec{u}=4\vec{AB}$.
  Ceci permet de tracer simplement le vecteur $\vec{u}$.
- [Simplification de l'expression d'un vecteur pour permettre le placement d'un point]
  Soient A, B et C trois points. Soit M le point défini par : $\vec{AM}=3\vec{BC}-2\vec{AC}$. Exprimons $\vec{AM}$ en fonction de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$:
  $\vec{AM}=3(\vec{BA}+\vec{AC})-2\vec{AC}$
  $=3\vec{BA}+3\vec{AC}-2\vec{AC}$
  $=3\vec{BA}+\vec{AC}$
  $=-3\vec{AB}+\vec{AC}$

2 Traduction vectorielle de propriétés géométriques

2.1 Milieux de segments

Propriété :

> Soient A, B et I trois points. I est le milieu du segment $[AB]$ si et seulement si $\vec{AI}=\vec{IB}$ si et seulement si $\vec{AI}=\frac{1}{2}\vec{AB}$.

Preuve :
Immédiat

2.2 Symétrie centrale et homothétie

Propriété :

> Soit A et B deux points du plan.
> - Si une symétrie centrale transforme A en A' et B en B', alors $\vec{A'B'}=-\vec{AB}$.
> - Si une homothétie de rapport $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$ transforme A en A' et B en B', alors $\vec{A'B'}=\lambda\vec{AB}$.

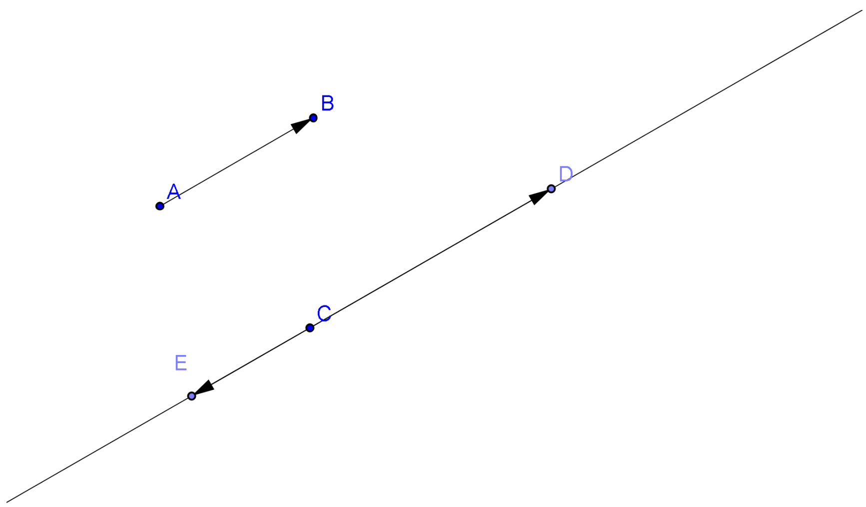
Preuve :

- I est le milieu de $[AA']$ et de $[BB']$ donc $\vec{AI} = \vec{IA'}$ et $\vec{BI} = \vec{IB'}$.
  D'où $\vec{A'B'} = \vec{A'I} + \vec{IB'} = \vec{IA} + \vec{BI} = \vec{BI} + \vec{IA} = \vec{BA}$.
  Donc $\vec{A'B'} = -\vec{AB}$.
- Soit O le centre de l'homothétie. $\vec{OA'} = \lambda\vec{OA}$ et $\vec{OB'} = \lambda\vec{OB}$ donc $\vec{A'B'} = \vec{A'O} + \vec{OB'} = \lambda\vec{AO} + \lambda\vec{OB} = \lambda(\vec{AO} + \vec{OB}) = \lambda\vec{AB}$.

2.3 Alignement et parallélisme

Définition :

Deux vecteurs non nuls sont *colinéaires* si il existe un réel k non nul tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

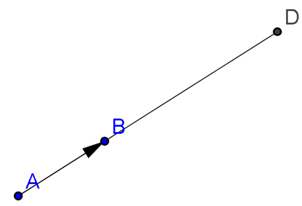


Remarque :
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si ils ont la même direction.

Exemple :
[Déterminer si deux vecteurs de coordonnées données sont colinéaires]
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives $(5; -3)$ et $(-15; 9)$ dans un repère.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires car $\vec{v} = -3\vec{u}$ ou $\vec{u} = -\frac{1}{3}\vec{v}$.

Propriétés :

- Soient A, B et C trois points. A, B et C sont alignés et distincts si et seulement si il existe un nombre réel k non nul tel que $\vec{AB} = k\vec{AC}$;
- Soient A, B, C et D quatre points. Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont colinéaires.



Propriété :

On suppose $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si les coordonnées des vecteurs sont proportionnelles.

Exemple :

[Déterminer si des vecteurs sont colinéaires]
Soient A et B les points de coordonnées $(1;3)$ et $(2;1)$ dans un repère. Soit $\vec{v}$ le vecteur de coordonnées $(4;3)$. $\vec{AB}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?
$\vec{AB}$ a pour coordonnées $(2-1;1-3)$ donc $(1;-2)$. On a $\frac{x_{\vec{AB}}}{x_{\vec{v}}} = \frac{1}{4}$ et $\frac{y_{\vec{AB}}}{y_{\vec{v}}} = \frac{-2}{3}$ donc les vecteurs ne sont pas colinéaires.