

Repérage dans le plan, cours pour la classe de seconde

F.Gaudon

28 juillet 2017

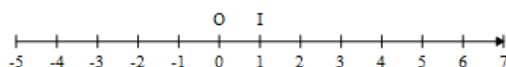
Table des matières

1	Coordonnées dans un repère du plan	2
2	Milieu d'un segment et distance dans un repère orthonormé	3
2.1	Milieu d'un segment	3
2.2	Racine carrée d'un nombre réel positif	4
2.3	Distance entre deux points	4
3	Tangente à un cercle	5

1 Coordonnées dans un repère du plan

Définition :

- On appelle ensemble des *nombres entiers naturels* et on note \mathbb{N} , l'ensemble des nombres 0, 1, 2, ..., 10, 11, ..., 123,
- On appelle ensemble des *nombres entiers relatifs* et on note \mathbb{Z} , l'ensemble des nombres ..., -87, ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, ..., 15,
- On appelle ensemble des *nombres réels* et on note \mathbb{R} l'ensemble des abscisses des points d'une droite graduée.

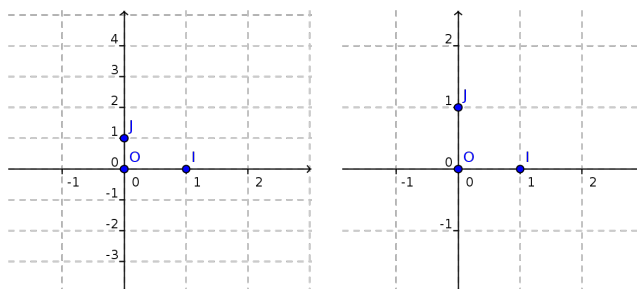


Définition :

Un *repère* du plan est défini par la donnée de trois points non alignés O , I et J formant un triangle. On note alors $(O; I; J)$ le repère ainsi défini.

Un repère est dit :

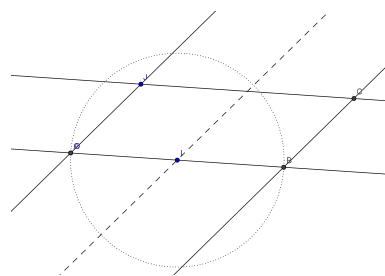
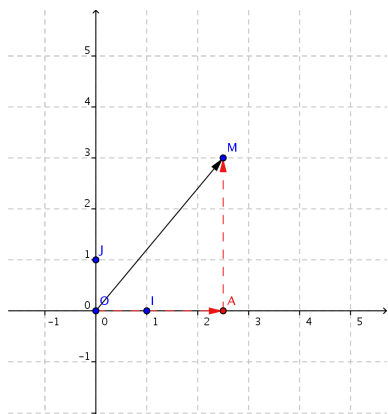
- *orthogonal* si OIJ est un triangle rectangle en O ;
- *orthonormé* ou *orthonormal* si OIJ un triangle rectangle isocèle de sommet principal O .



Définition et propriété :

À tout point M du plan, on associe un unique couple $(x; y)$ de nombres réels appelé *couple de coordonnées* du point M dans le repère $(O; I; J)$.

- x est appelé *abscisse* du point M ;
- y est appelé *ordonnée* du point M .



Repère $(O; I; J)$ quelconque. Le point C a pour coordonnées $(2;1)$.

2 Milieu d'un segment et distance dans un repère orthonormé

2.1 Milieu d'un segment

Propriété :

Soient A et B deux points de coordonnées respectives $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$ d'un repère $(O; I; J)$. Alors le *milieu* K du segment $[AB]$ a pour abscisse la moyenne des deux abscisses et pour ordonnée la moyenne des ordonnées, c'est à dire, a pour coordonnées :

$$x_K = \frac{x_A + x_B}{2}$$

et

$$y_K = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Exemples :

- Soient $A(5; 7)$ et $B(-3; 2)$. Alors le milieu K de $[AB]$ a pour coordonnées :

$$x_K = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{5 + (-3)}{2} = 1$$

$$\text{et } y_K = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{7 + 2}{2} = \frac{9}{2}$$

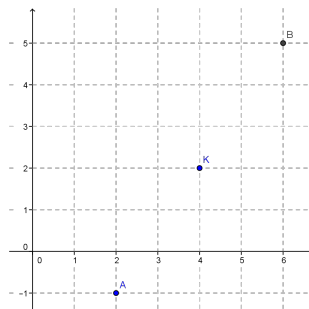
- Soient $A(2; -1)$ et $K(4; 2)$. Le point $B(x; y)$ tel que K est le milieu de $[AB]$ vérifie

$$4 = \frac{2+x}{2} \text{ et } 2 = \frac{-1+y}{2}$$

$$\text{donc } 2 + x = 8 \text{ et } -1 + y = 4$$

$$\text{d'où } x = 6 \text{ et } y = 4 + 1$$

c'est à dire $y = 5$.



Algorithmique :

Algorithme de calcul des coordonnées du milieu du segment $[AB]$ avec A et B de coordonnées respectives $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$:

Entrées : x_A, y_A, x_B, y_B

Début traitement

 | Affecter à x_K la valeur $\frac{x_A+x_B}{2}$;

 | Affecter à y_K la valeur $\frac{y_A+y_B}{2}$.

Fin

Sorties : x_K, y_K

2.2 Racine carrée d'un nombre réel positif

Définition :

Soit a un réel positif. La *racine carrée* de a est le nombre positif dont le carré vaut a . On le note \sqrt{a} . On a donc $\sqrt{a} \geq 0$ et $\sqrt{a^2} = a$.

Exemples :

- $\sqrt{144} = 12$;
- $\sqrt{2}$ n'a pas de valeur décimale. Une valeur décimale approchée est $\sqrt{2} \approx 1,41$

Propriété :

Soit a un réel positif. Alors $\sqrt{a^2} = a$.

Preuve :

a est un nombre positif dont le carré vaut a^2 donc c'est la racine carrée de a^2 .

2.3 Distance entre deux points

Propriété :

On considère deux points A et B de coordonnées $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$ dans un repère $(O; I; J)$ orthonormal. Alors la distance AB est donnée par :

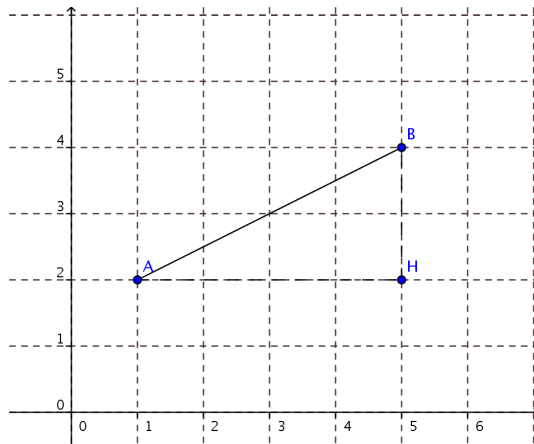
$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

ce qui s'écrit aussi :

$$AB = \sqrt{(y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2}$$

Preuve :

On supposera afin d'alléger les écritures que $x_A < x_B$ et $y_A < y_B$, les autres cas se démontrant de la même manière. Soit H le point de coordonnées $(x_B; y_A)$. Le repère est orthonormal donc les droites (AH) et (BH) sont perpendiculaires en H et l'unité est la même sur les deux axes. La distance AH vaut $x_B - x_A$ et la distance BH est $y_B - y_A$. Dans le triangle ABH rectangle en H , le théorème de PYTHAGORE permet donc d'écrire que $AB^2 = AH^2 + BH^2$ c'est à dire $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$ d'où la formule.

**Exemple :**

On considère les points $A(8; -2)$ et $B(-2; 4)$. Alors la distance AB est :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$\text{donc } AB = \sqrt{(-2 - 8)^2 + (4 - (-2))^2}$$

$$\text{d'où } AB = \sqrt{(-10)^2 + 6^2}$$

$$\text{et } AB = \sqrt{136} \text{ donc } AB = 2\sqrt{34}$$

Algorithmique :

Algorithme de calcul de la distance entre deux points A et B de coordonnées respectives $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$:

Entrées : x_A, y_A, x_B, y_B

Début traitement

| Affecter à d la valeur $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

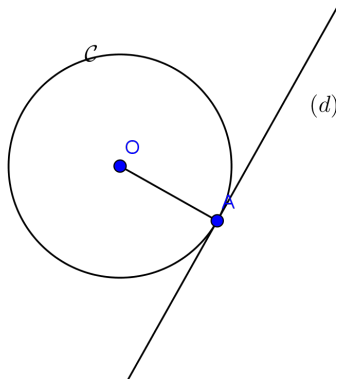
Fin

Sorties : d

3 Tangente à un cercle

Définition :

Soit \mathcal{C} un cercle et A un point du cercle. On dit qu'une droite (d) est *tangente* à ce cercle au point A si la droite d est perpendiculaire au cercle au point A .



Propriété :

La tangente (d) à un cercle \mathcal{C} en un point A du cercle admet A pour unique point d'intersection avec le cercle.