Simulations et probabilités, cours de seconde

1 Simulation d'expériences aléatoires

Définition :

- Une *expérience aléatoire* est une expérience dont le résultat soumis au hasard n'est pas prévisible.
- L'ensemble de toutes les issues possibles d'une expérience aléatoire constitue .... de tous les possibles.
- *Simuler* une expérience aléatoire, c'est la remplacer par une autre expérience aléatoire dont les distributions de fréquences qu'elle donnerait pour un grand nombre de tirages seraient proches.

Exemple :

- Le lancer d'un dé à six faces constitue une expérience aléatoire d'issues x_i pour i allant de 1 à 6 et correspondants à la sortie de la face i du dé. Il y a donc 6 issues ou éventualités possibles.
- En supposant qu'il naît autant de garçons que de filles, la naissance d'un garçon ou d'une fille peut être simulée par un lancer de pièce, le côté « pile » représentant la naissance d'un garçon, le côté « face » la naissance d'une fille.

Propriété :

Soit n un entier naturel. La séquence suivante permet d'obtenir des nombres entiers naturels au hasard compris entre 1 et n afin de simuler une expérience aléatoire comportant n issues possibles :

....

Exemple :

Pour simuler le lancer d'un dé à 6 faces non truqué, on peut utiliser la formule ....

2 Lois de probabilité

Définition :

Pour tout expérience aléatoire d'issues possibles x_1, x_2, ..., x_n avec n entier naturel, on définit une *loi de probabilité* en leur associant n nombres réels p_1, p_2, ..., p_n tels que :

- pour tout i allant de 1 à n, ... ; ;
- ....

Remarque :
On donne souvent la loi de probabilité sous la forme d'un tableau :

issues x_i	x_1	x_2	...	x_n
probabilités p_i	p_1	p_2	...	p_n

Propriété et définition (loi des grands nombres) :

Si on répète une expérience aléatoire d'univers $E = \{x_1; x_2; x_3; \ldots; x_n\}$ « un grand nombre de fois », alors ....
....
....

Exemple :
On jette un dé 100 fois et on note la face apparue à chaque lancer. Si le 1 apparaît 12 fois la fréquence de sortie est $\frac{12}{100} = 0,12$. On a $f_1 + f_2 + \ldots + f_6 =$ ....

Si le nombre de lancers devient grand, les fréquences se stabilisent autour de ...., probabilité d'apparition du 1.

Exemple :
Une pièce de monnaie est truquée de sorte que la probabilité d'obtenir pile est le double de celle d'obtenir face. On appelle p_1 la probabilité d'obtenir pile et p_2 celle d'obtenir face.
On a donc .... Or $p_1 = 2 \times p_2$ donc .... d'où .... et .... et ....
La loi de probabilité est donc :

issues	...	...
probabilités	...	...

3 Probabilités d'événements

Définitions :

Soit E l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire. Soit r le nombre d'issues de l'expérience.

- Un ensemble d'éventualités constitue un .... A.
  Un événement A est donc une partie de l'univers.
  Le nombre d'éventualités qui le constitue est appelé .... de A et noté ....
- Tout événement formé d'une seule éventualité est appelé ....
- $\emptyset$ est appelé ....
- E est l'événement ....

Exemple :
lancer d'un dé à six faces :

- .... est un événement ;
- .... est un événement élémentaire ;
- .... est l'événement impossible.

Propriété :

- Pour tout événement A, on a .... $\leqslant P(A) \leqslant$ .... ;
- la probabilité d'un événement est .... des probabilités des issues qui le réalise ;
- $P(\emptyset) =$ .... ;
- $P(E) =$ .... ;

4 Équiprobabilité

Définition et propriété :

Lorsque les n issues d'une expérience aléatoire ont la même probabilité p de se réaliser, on parle de .... ou ....
Alors $p =$ ....

Exemple :
Pour le lancer d'un dé non truqué à six faces, chaque face ayant la même probabilité d'apparaître, la loi est équirépartie et chaque face i a une probabilité p_i d'apparaître égale à $p_i =$ ....

Propriété (cas d'une loi équirépartie) :

Dans le cas d'une loi équirépartie, la probabilité d'un événement A est :

....

Exemple 1, utilisation d'un *tableau* :
Le tableau suivant montre la répartition des personnels d'une usine :

	Cadres	Ouvriers	Total
Hommes	100	200	300
Femmes	50	150	200
Total	150	350	500

On rencontre une personne au hasard. On note H l'événement « la personne rencontrée est un homme » et C l'événement « la personne rencontrée est un cadre ».

Il y a .... car, la rencontre se faisant au hasard, toutes les personnes ont la même probabilité d'être rencontrées.

L'univers est constitué des .... personnes de l'usine.

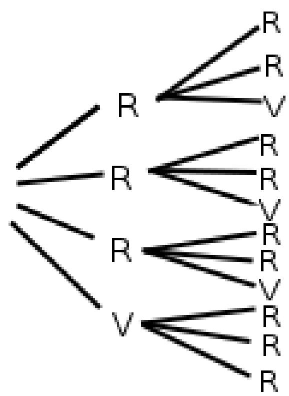
L'événement H est constitué de .... personnes.

La probabilité de l'événement H est donc $P(H) =$ ....

L'événement C est constitué de .... issues.

La probabilité de l'événement C est donc $P(C) =$ ....

Exemple 2, utilisation d'un *arbre* :
Une urne contient 3 jetons rouges et 1 jeton vert indiscernables au toucher. On tire un jeton, on note sa couleur, on ne remet pas le jeton dans l'urne, on tire un deuxième jeton et on note sa couleur. On peut synthétiser la situation par l'arbre *probabiliste* suivant :



L'univers des possibles est constitué des .... qui apparaissent sur l'arbre précédent. Il y a .... car les jetons sont indiscernables. On appelle A l'événement "Obtenir deux jetons rouges". D'après l'arbre, cet événement est constitué de .... éventualités donc la probabilité de l'événement A est $P(A) =$ ....

5 Calculs avec des probabilités

Définition :

Soient A et B deux événements.

- L'événement $A \cap B$ (lire "A .... B") est l'ensemble des issues qui réalisent à la fois A .... B.
- Lorsqu'aucune issue ne réalise A et B, c'est à dire $A \cap B =$ ...., on dit que A et B sont .... ou ....
- L'événement $A \cup B$ (lire "A .... B") est l'ensemble des issues qui réalisent A .... B, c'est à dire .... des deux événements.
- L'événement $\bar{A}$ appelé événement .... ou .... de A est l'ensemble des issues qui ....

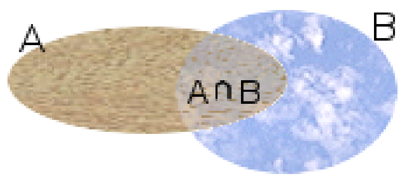
Propriété :

Soit P une loi de probabilité sur un ensemble E.
- Pour tous les événements A et B, on a :

....

- Pour tout événement A,

....



Preuve :
- Dans le calcul de $P(A)+P(B)$, les probabilités élémentaires p_i correspondants à l'événement $A \cap B$ apparaissent deux fois pour obtenir $P(A \cup B)$, on les retrnche donc une fois ce qui revient à retrancher $P(A \cap B)$ à $P(A)+P(B)$ pour obtenir $P(A \cup B)$
- On a $E = A \cup \bar{A}$ et $A \cap \bar{A} = \emptyset$ donc A et $\bar{A}$ sont incompatibles et $P(E) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$. Or $P(E) = 1$ donc $1 = P(A) + P(\bar{A})$ d'où $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Exemple :
On tire une carte dans un jeu de 32 cartes. Chaque carte a la même probabilité $\frac{1}{32}$ d'être tirée. On appelle C l'événement « On tire un coeur » et R l'événement « On tire un roi ».

La probabilité $P(C)$ est .... La probabilité $P(R)$ est ....

$R \cap C$ est l'événement « On tire le roi de coeur ». Sa probabilité $P(R \cap C)$ est ....

$R \cup C$ est l'événement « On tire un roi ou un coeur ». Sa probabilité est ....

On enlève .... afin de ne pas compter deux fois le roi de coeur.