Second degré, cours, 2nde

F.Gaudon

17 juin 2017

Table des matières

1 Définition et forme canonique

Définition :
On appelle *fonction polynôme du second degré* toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et qui s'écrit $f(x) =$...................... où a, b et c sont des réels fixés et $a \neq 0$.

Propriété et définition :
Toute fonction polynôme du second degré f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$ s'écrit aussi :

....

où

....

(prononcer « alpha »)

....

(prononcer « beta »)
Cette écriture est appelée .... de la fonction f.

Exemple :
Soit f la fonction définie par $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$.
On a $\alpha =$ ....
et $f(\alpha) =$ ....
On vérifie que $3(x-1)^2 - 2 =$ ....
Donc $3(x-1)^2 - 2$ est bien la forme .... associée à $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$.

2 Étude des variations

Propriété :
Pour toute fonction polynôme du second degré $f \mapsto ax^2 + bx + c$,

- si $a > 0$ la fonction f est strictement .... puis strictement .... et admet un minimum en $x =$........
- si $a < 0$ la fonction f est strictement .... puis strictement .... et admet un maximum en $x =$.......

Synthèse :

Si $a > 0$,

x	$-\infty$	......	$+\infty$
$f(x)$	......	......	.....

et si $a < 0$,

x	$-\infty$	......	$+\infty$
$f(x)$	......	......	....

Preuve :

Supposons $a < 0$, l'autre cas se traiterait de la même manière. On a $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ où a, α et β sont des réels avec $a \neq 0$.

- Soient x_1 et x_2 deux réels de l'intervalle $]-\infty;\alpha]$ et tels que $x_1 < x_2$. On a donc $x_1 - \alpha$.....$x_2 - \alpha \leq 0$. Comme la fonction carré est strictement .... sur $]-\infty;0]$, on a donc $(x_1-\alpha)^2$.......$(x_2-\alpha)^2$ d'où en multipliant par le nombre a ...., $a(x_1-\alpha)^2$.....$a(x_2-\alpha)^2$ et $a(x_1-\alpha)^2+\beta$.....$a(x_2-\alpha)^2+\beta$ c'est à dire $f(x_1)$.....$f(x_2)$ ce qui justifie que la fonction est strictement .... sur $]-\infty;\alpha]$.
- Soient x_1 et x_2 deux réels de l'intervalle $[\alpha;+\infty[$ et tels que $x_1 < x_2$. On a donc $0 \leq x_1 - \alpha$....$x_2 - \alpha$. Comme la fonction carré est strictement .... sur $[0;+\infty[$, on a donc $(x_1-\alpha)^2$.....$(x_2-\alpha)^2$ d'où en multipliant par le nombre a négatif, $a(x_1-\alpha)^2$........$a(x_2-\alpha)^2$ et $a(x_1-\alpha)^2+\beta$.....$a(x_2-\alpha)^2+\beta$ c'est à dire $f(x_1)$....$f(x_2)$ ce qui justifie que la fonction est strictement .... sur $[\alpha;+\infty[$.

On a donc bien un maximum pour $x =$..... et ce maximum est $f(.......) =$.....

Exemple :

Dans l'exemple précédent $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$. On a vu que $\alpha =$...... et $f(....) =$.... . Par ailleurs, $a = 3$. a est positif donc on a le tableau de variations suivants :

x	$-\infty$	....	$+\infty$
$f(x)$	....	.....	......

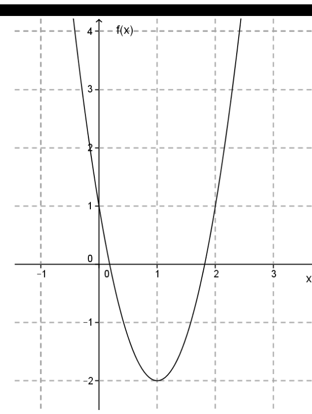
3 Représentation graphique

Propriété et définition :

Dans un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$ du plan, la représentation graphique de la fonction trinôme du second degré f est appelée une .... dont le point S de coordonnées .... est le sommet.

Exemple :

On a vu que pour $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$, on a $\alpha =$.... et $f(....) =$..... donc le point S de coordonnées .... est le sommet de la parabole représentant la fonction f.



4 Transformations d'écritures

Propriété :

Pour tous les nombres réels a, b et k :

....

....

forme factorisée, produit *forme développée, somme*

Propriété :

Pour tous les nombres réels a et b on a les *identités remarquables* suivantes :

....

....

....

forme factorisée, produit *forme développée, somme*

5 Résolution d'équations du second degré

Propriété :
Un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.

Exemples de résolution d'équations du second degré : :

- Résolution de l'équation $(3x+2)(4x-3)=0$ dans l'ensemble des réels.
  D'après la propriété énoncée, ... ou ....
  c'est à dire .... ou ....
  donc encore $x=$ .... ou $x=$ ....
  L'équation $(3x+2)(4x-3)=0$ a donc pour solutions .... et ....
- Résolution de l'équation $(3x+2)(2x-1)-x(3x+2)=0$ dans l'ensemble des réels.
  Ici, l'équation n'est pas factorisée. La développer ne permet pas de résoudre l'équation car on trouve $3x^2-x-2=0$ qu'on ne sait pas résoudre.
  Il faut donc la factoriser : l'équation donne alors ....
  c'est à dire .... $=0$ qui se résout en utilisant la propriété énoncé ci-dessus.
  On a donc .... ou ....
  donc $x=$...... ou $x=$......
- Résolution de l'équation $x^2+4x+4=0$.
  Ici encore, l'équation n'est pas factorisée.
  Il n'y a pas de facteur commun mais une identité remarquable apparaît : ....
  On résout donc l'équation ....
  qui donne .... donc ....
- Résolution de l'équation $(x+5)^2-8=0$ dans $\mathbb{R}$.
  On factorise en remarquant que $8=\sqrt{8}^2$ avec l'identité remarquable ....
  D'où l'équation $(X+5)^2-\sqrt{8}^2=0$
  équivaut à ....
  Donc à .... ou ....
  D'où .... ou ....

6 Étude de signe de produits et résolution d'inéquations produits

6.1 Rappel : étude du signe des fonctions affines

Synthèse :

Si $m > 0$:

x	$-\infty$	$-\frac{p}{m}$	$+\infty$
signe de $mx+p$	...	...	...

Si $m < 0$:

x	$-\infty$	$-\frac{p}{m}$	$+\infty$
signe de $mx+p$	...	...	...

6.2 Études de signes de produits

Exemple :

On considère le produit $(2x-3)(1-x)$. On détermine les solutions de l'équation $(2x-3)(1-x) = 0$:
$2x - 3 = 0$ équivaut à $x =$ ....
$1 - x = 0$ équivaut à $x =$ ....
On fait apparaître dans un tableau de signes, les signes de $2x - 3$ et de $1 - x$, puis on utilise la règle des signes pour les produits :

x	$-\infty$		...		...		$+\infty$
$2x-3$		...		...	...	...	
$1-x$		...	...	...		...	
$(2x-3)(1-x)$		...		...		...	

6.3 Résolution d'inéquations produits

Exemple :

On considère l'inéquation produit $(2x - 3)(1 - x) \leq 0$. D'après le tableau de signes précédent, l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} =]-\infty; 1] \cup [\frac{3}{2}; +\infty[$.