Second degré, cours, 2nde

F.Gaudon

17 juin 2017

Table des matières

1 Définition et forme canonique

Définition :

On appelle *fonction polynôme du second degré* toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et qui s'écrit $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels fixés et $a \neq 0$.

Propriété et définition :

Toute fonction polynôme du second degré f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$ s'écrit aussi :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

où

$$\alpha = \frac{-b}{2a}$$

(prononcer « alpha »)

$$\beta = f(\alpha)$$

(prononcer « beta »)

Cette écriture est appelée *forme canonique* de la fonction f.

Exemple :

Soit f la fonction définie par $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$.

On a $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2\times 3} = \frac{6}{6} = 1$

et $f(\alpha) = f(1) = 3 \times 1^2 - 6 \times 1 + 1 = 3 - 6 + 1 = -2$

On vérifie que $3(x-1)^2 - 2 = 3(x^2 - 2x + 1) - 2 = 3x^2 - 6x + 3 - 2 = 3x^2 - 6x + 1 = f(x)$

Donc $3(x-1)^2 - 2$ est bien la forme canonique de $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$.

2 Étude des variations

Propriété :

Pour toute fonction polynôme du second degré $f \mapsto ax^2 + bx + c$,

- si $a > 0$ la fonction f est strictement décroissante puis strictement croissante et admet un minimum en $x = \alpha = \frac{-b}{2a}$.
- si $a < 0$ la fonction f est strictement croissante puis strictement décroissante et admet un maximum en $x = \alpha = \frac{-b}{2a}$.

Synthèse :

Si $a > 0$,

x	-∞	α	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$
		$f(\alpha)$	

et si $a < 0$,

x	-∞	α	$+\infty$
		$f(\alpha)$	
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

Preuve :

Supposons $a < 0$, l'autre cas se traiterait de la même manière. On a $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ où a, α et β sont des réels avec $a \neq 0$.

- Soient x_1 et x_2 deux réels de l'intervalle $]-\infty;\alpha]$ et tels que $x_1 < x_2$. On a donc $x_1 - \alpha < x_2 - \alpha \leq 0$. Comme la fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$, on a donc $(x_1-\alpha)^2 > (x_2-\alpha)^2$ d'où en multipliant par le nombre a négatif, $a(x_1-\alpha)^2 < a(x_2-\alpha)^2$ et $a(x_1-\alpha)^2 + \beta < a(x_2-\alpha)^2 + \beta$ c'est à dire $f(x_1) < f(x_2)$ ce qui justifie que la fonction est strictement croissante sur $]-\infty;\alpha]$.
- Soient x_1 et x_2 deux réels de l'intervalle $[\alpha;+\infty[$ et tels que $x_1 < x_2$. On a donc $0 \leq x_1 - \alpha < x_2 - \alpha$. Comme la fonction carré est strictement croissante sur $[0;+\infty[$, on a donc $(x_1-\alpha)^2 < (x_2-\alpha)^2$ d'où en multipliant par le nombre a négatif, $a(x_1-\alpha)^2 > a(x_2-\alpha)^2$ et $a(x_1-\alpha)^2 + \beta > a(x_2-\alpha)^2 + \beta$ c'est à dire $f(x_1) > f(x_2)$ ce qui justifie que la fonction est strictement décroissante sur $[\alpha;+\infty[$.

On a donc bien un maximum pour $x = \alpha$ et ce maximum est $f(\alpha) = (\alpha-\alpha)^2 + \beta = \beta$.

Exemple :

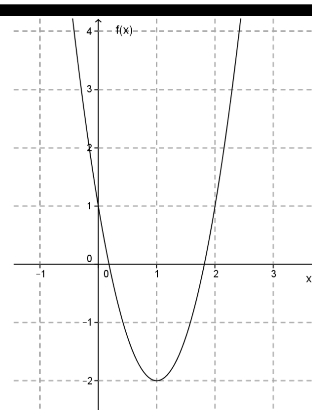
Dans l'exemple précédent $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$. On a vu que $\alpha = \frac{-b}{2a} = 1$ et $f(1) = -2$. Par ailleurs, $a = 3$. a est positif donc on a le tableau de variations suivants :

x	-∞	1	$+\infty$
		-2	
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

3 Représentation graphique

Propriété :
Dans un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$ du plan, la représentation graphique de la fonction trinôme du second degré f est une parabole dont le point S de coordonnées $(\alpha; f(\alpha))$ est le sommet.

Exemple :
On a vu que pour $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$, on a $\alpha = \frac{-b}{2a} = 1$ et $f(1) = -2$ donc le point S de coordonnées $(1; -2)$ est le sommet de la parabole représentant la fonction f.



4 Transformations d'écritures

Propriété :
Pour tous les nombres réels a, b et k :

$$k(a+b) = ka + kb$$

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

forme factorisée, produit *forme développée, somme*

Propriété :
Pour tous les nombres réels a et b on a les *identités remarquables* suivantes :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

forme factorisée, produit *forme développée, somme*

5 Résolution d'équations produits

Propriété :
Un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.

Exemples de résolution d'équations du second degré : :

- Résolution de l'équation $(3x+2)(4x-3)=0$ dans l'ensemble des réels. D'après la propriété énoncée, $3x+2=0$ ou $4x-3=0$ c'est à dire $3x=-2$ ou $4x=3$ donc encore $x=\frac{-2}{3}$ ou $x=\frac{3}{4}$. L'équation $(3x+2)(4x-3)=0$ a donc pour solutions $\frac{-2}{3}$ et $\frac{3}{4}$.
- Résolution de l'équation $(3x+2)(2x-1)-x(3x+2)=0$ dans l'ensemble des réels. Ici, l'équation n'est pas factorisée. La développer ne permet pas de résoudre l'équation car on trouve $3x^2-x-2=0$ qu'on ne sait pas résoudre. Il faut donc la factoriser : l'équation donne alors $(3x+2)(2x-1-x)=0$ c'est à dire $(3x+2)(x-1)=0$ qui se résout en utilisant la propriété énoncé ci-dessus. On a donc $3x+2=0$ ou $x-1=0$ donc $x=\frac{-2}{3}$ ou $x=1$.
- Résolution de l'équation $x^2+4x+4=0$. Ici encore, l'équation n'est pas factorisée. Il n'y a pas de facteur commun mais une identité remarquable apparaît $x^2+4x+4=(x+2)^2$. On résout donc l'équation $(x+2)^2=0$ qui donne $x+2=0$ donc $x=-2$.

6 Résolution d'inéquations étude de signe de produits

6.1 Exemple d'étude d'un produit

On considère le produit $(2x-3)(1-x)$.

- $2x-3=0$ équivaut à $2x=3$ donc à $x=\frac{3}{2}$
  $1-x=0$ pour $x=1$.
- On fait apparaître dans un tableau de signes, les signes de $2x-3$ et de $1-x$, puis on utilise la règle des signes pour les produits :

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$2x-3$		-		-	0	+	
$1-x$		+	0	-		-	
$(2x-3)(1-x)$		-		+		-	

6.2 Exemple de résolution d'une inéquation produit

On considère l'inéquation produit $(2x-3)(1-x)\leq 0$. D'après le tableau de signes précédent, l'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=]-\infty;1]\cup[\frac{3}{2};+\infty[$.