# Fonctions affines et systèmes, cours, classe de seconde

F.Gaudon

20 mai 2017

## Table des matières

# 1 Étude des fonctions affines

**Définition :**

Soient $a$ et $b$ deux nombres réels. On appelle fonction *affine* la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ax + b$$

**Remarque :**

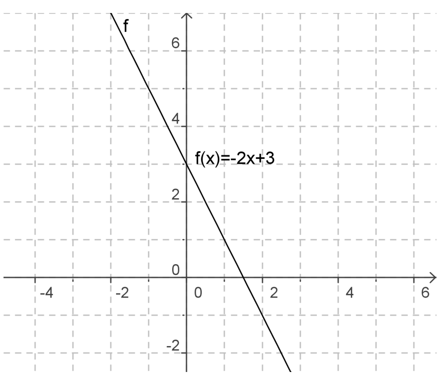
Si $b = 0$, $f$ est définie par $f(x) = ax$ et est dite *linéaire*.

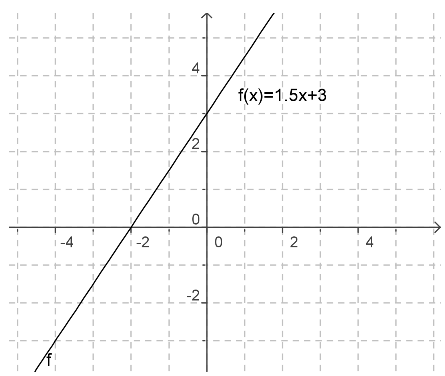
**Représentation graphique :**

La représentation graphique de toute fonction affine est une droite.
Un point $M(x;y)$ appartient à la droite si et seulement si $x$ et $y$ sont solutions de l'équation $y = ax + b$. $y = ax + b$ est appelée *équation de la droite* représentant $f$.

**Exemple :**

Représentation graphique de $f : x \mapsto -2x + 3$.
On obtient les coordonnées de deux points de la droite :
Pour $x = 0$, $y = -2\times 0+3 = 3$ donc $A(0;3)$ appartient à la représentation graphique de la fonction $f$.
Pour $x = 3$, $y = -2 \times 3 + 3 = -3$ donc $B(3;-3)$ appartient à la représentation graphique de la fonction $f$.




**Définition :**

On considère l'équation de droite $y = ax + b$ où $a$ et $b$ sont deux réels.

- $a$ est appelé *coefficient directeur* de la droite ;
- $b$ est appelé *ordonnée à l'origine* de la droite.

## 1.1 Variations

- Si $a > 0$ alors la fonction $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ ;
- si $a = 0$ alors la fonction $f$ est constante sur $\mathbb{R}$ ;
- si $a < 0$ alors la fonction $f$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

$a > 0$

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f(x)$ | $\nearrow$ | |

$a < 0$

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f(x)$ | $\searrow$ | |

**Preuve :**

- Si $a > 0$, il s'agit de montrer que si $x$ augmente, alors $f(x)$ augmente,
c'est à dire que si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) < f(x_2)$.
Soient donc $x_1$ et $x_2$ deux réels tels que $x_1 < x_2$.
Alors $ax_1 < ax_2$ et $ax_1 + b < ax_2 + b$
c'est à dire $f(x_1) < f(x_2)$ donc $f$ est strictement croissante sur $]-\infty; +\infty[$ ;
- Si $a = 0$, pour tout $x$ réel, $f(x) = b$ donc $f$ est constante égale à $b$ ;
- si $a < 0$, il s'agit de montrer que si $x$ augmente, alors $f(x)$ diminue,
c'est à dire que si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) > f(x_2)$.
Soient donc $x_1$ et $x_2$ deux réels tels que $x_1 < x_2$.
Alors on a $ax_1 > ax_2$ puis $ax_1 + b > ax_2 + b$
c'est à dire $f(x_1) > f(x_2)$ donc $f$ est strictement décroissante sur $]-\infty; +\infty[$.

**Exemple [Savoir reconnaître les variations d'une fonction affine dont l'écriture algébrique est donnée] :**
On considère la fonction $f$ définie par $f(x) = 3 - 2x$.
$f(x) = 3 + (-2x) = -2x + 3$ donc $a = -2$. Comme $a < 0$, la fonction $f$ est strictement décroissante sur $]-\infty; +\infty[$.

## 1.2 Signe

Si $a \neq 0$, les deux cas possibles sont résumés dans les tableaux de signe suivants :

si $a > 0$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{b}{a}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| signe de $ax + b$ | | - | 0 | + | |

si $a < 0$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{b}{a}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| signe de $ax + b$ | | + | 0 | - | |

**Preuve :**
$f(x) > 0$ signifie $ax + b > 0$
c'est à dire $ax > -b$ ou encore
si $a < 0$, $x < -\frac{b}{a}$

et, si $a > 0$, $x > -\frac{b}{a}$.
D'où les tableaux de signe.

**Exemple [Savoir dresser le tableau de signe d'une fonction affine] :**
Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = -2x + 3$.

- On résout l'équation $f(x) = 0$ pour savoir pour quelle valeur de $x$, $f(x)$ s'annule :
  $f(x) = 0$ équivaut à $-2x + 3 = 0$ c'est à dire à $-2x = -3$ donc $x = \frac{-3}{-2}$ ou encore $x = \frac{3}{2}$.

- On dresse le tableau de signe :

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{3}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $+$ | 0 | - | |

## 2 Proportionnalité des accroissements

**Propriété :**

Soit une fonction affine $f$ définie par $f(x) = ax + b$ de représentation graphique $(d)$ dans un repère du plan. Alors l'accroissement de la variable $x$ est proportionnel à l'accroissement des images $f(x)$ et le coefficient de proportionnalité est le coefficient directeur $a$ de la fonction affine c'est à dire que pour tous les points $A$ et $B$ de la droite $(d)$ de coordonnées $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$ avec $x_A \neq x_B$ on a :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

et

$$b = y_A - ax_A$$

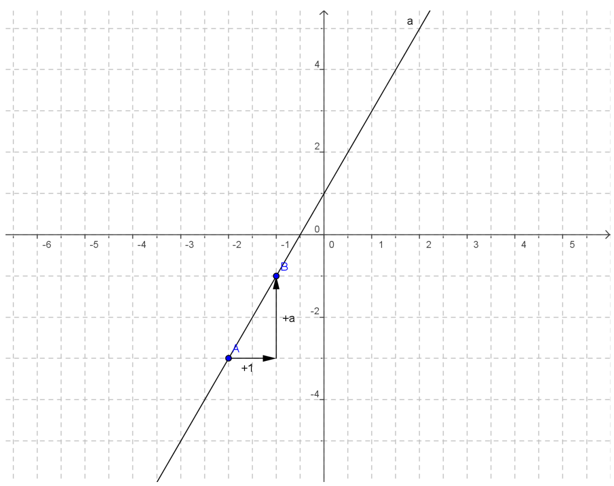
**Preuve :**
On a $y_B - y_A = f(x_B) - f(x_A) = ax_B + b - (ax_A + b) = ax_B - ax_A + b - b = a(x_B - x_A)$.
D'où la proportionnalité et la première formule.
Par ailleurs, $A(x_A; y_A)$ appartient à la droite donc $y_A = ax_A + b$ d'où $b = y_A - ax_A$ et la deuxième formule.

**Exemples d'utilisations :**

- **[Savoir déterminer l'expression algébrique d'une fonction affine connaissant deux points de sa représentation graphique]**
  Soit $f$ une fonction affine telle que $f(1) = 5$ et $f(3,5) = 15$.
  $f$ est affine donc de la forme $f(x) = ax + b$ pour tout $x$ réel où $a$ et $b$ sont

deux nombres réels à déterminer et $A(1;5)$ et $B(3,5;15)$ sont deux points de la droite représentant $f$.
On $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{15-5}{3{,}5-1} = \frac{10}{2{,}5} = 4$.
Donc $f(x)$ s'écrit $f(x) = 4x + b$ pour tout réel $x$.
En outre on sait que $A(1;5)$ appartient à la droite donc $b = 5 - 4 \times 1 = 1$ (on aurait tout aussi bien pu utiliser le point $B$).
Finalement, $f(x) = 4x + 1$.

- **[Savoir tracer la représentation graphique d'une fonction affine en utilisant les coefficients $a$ et $b$]**
  Soit $f$ la fonction affine dont la droite $\mathcal{D}$ qui la représente dans un repère passe par le point $A$ de coordonnées $(-2;-3)$ et dont le nombre $a$ dans l'écriture $f(x) = ax+p$ vaut $b = 2$. Alors si on avance de 1 unité en abscisse (autrement dit si $x_B - x_A = 1$), pour retrouver un point de la droite $\mathcal{D}$ on doit augmenter de 2 en ordonnées pour retrouver un point $B$ de la droite ($y_B - y_A = 2$).




# 3 Systèmes de deux équations à deux inconnues

## 3.1 Vocabulaire

**Définition :**

> Un système d'équations de deux inconnues est constitué de deux équations ayant chacune deux inconnues.
> Les solutions d'un système d'équations à deux inconnues sont les couples de nombres qui vérifient les deux équations à la fois.

**Exemple :**

$$\begin{cases} 2x - y &= 1 \\ -x + 2y &= 4 \end{cases}$$

$2x - y$ est une des deux équations du système et $x$ et $y$ en sont les inconnues.
Résoudre ce système, c'est trouver tous les couples de nombres $(x; y)$ qui sont solutions des deux équations.

## 3.2 Méthodes de résolution algébriques

**Substitution :**

**Méthode :**

> On exprime l'une des inconnues en fonction de l'autre l'aide d'une des équations et on reporte l'expression dans la deuxième équation.

**Exemple :**

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x - y & = & 1 \ (1) \\ -x + 2y & = & 4 \ (2) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & 2x - 1 \text{ on exprime y en fonction de x avec (1)} \\ -x + 2y & = & 4 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & 2x - 1 \\ -x + 2(2x - 1) & = & 4 \text{ on reporte l'expression de y dans la deuxième équation} \end{array}\right.$$

On calcule $x$ à l'aide de l'équation restante :

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & 2x - 1 \\ -x + 4x - 2 & = & 4 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & 2x - 1 \\ 3x - 2 & = & 4 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & 2x - 1 \\ 3x & = & 6 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & 2x - 1 \\ x & = & 2 \end{array}\right.$$

On reporte la valeur de $x$ trouvée pour trouver $y$ :

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & 2 \times 2 - 1 \\ x & = & 2 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & 3 \\ x & = & 2 \end{array}\right.$$

On vérifie ensuite que le couple trouvé convient bien :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2 \times 2 - 3 & = & 1 \\ -2 + 2 \times 3 & = & 4 \end{array}\right.$$

Le système admet une seule solution, le couple $(2; 3)$.

**Combinaison :**

**Méthode :**

Dans la méthode par combinaison, on multiplie l'une ou les deux équations par des nombres convenablement choisis de telle manière que l'une des inconnues disparaisse par addition membre à membre.

**Exemple :**

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+3y & = & 5\text{(a)} \\ 5x+3y & = & 16\text{ (b)} \end{array}\right.$$

On multiplie les deux membres de $(a)$ par -5 et les deux membres de $(b)$ par 2 :

$$\left\{\begin{array}{rcl} (-5)\times 2x+(-5)\times 3y & = & (-5)\times 5\text{ (a)}\times 5 \\ 2\times 5x+2\times 3y & = & 16\times 2\text{ (b)}\times 2 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} -10x-15y & = & -25 \\ 10x+6y & = & 32 \end{array}\right.$$

On additionne membre à membre la première et la deuxième équation :

$$10x-10x+6y-15y=-25+32$$

donc

$$-9y=7$$

c'est à dire

$$y=-\frac{7}{9}$$

On reporte ensuite dans l'une des équations d'origine :

$$2x+3\times-\frac{7}{9}=5$$

donc

$$2x-\frac{21}{9}=5$$

c'est à dire

$$2x=\frac{66}{9}$$

donc

$$x=\frac{33}{9}$$

ou

$$x=\frac{11}{3}$$

On vérifie ensuite :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2\times\frac{11}{3}+3\times-\frac{7}{9} & = & 5 \\ 5\times\frac{11}{3}+3\times-\frac{7}{9} & = & 16 \end{array}\right.$$

Le système admet une unique solution $(\frac{11}{3};-\frac{7}{9})$.

## 3.3 Résolution graphique

**Méthode :**

Résoudre graphiquement un système d'équations consiste à interpréter le système à l'aide de deux fonctions affines dont les droites représentations graphiques ont pour équations les deux équations du système. La solution du système est alors le couple de coordonnées du point d'intersection des deux droites.

**Exemple :**

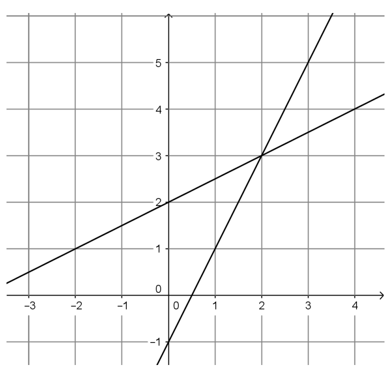
On considère le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 2x - y &= 1 \\ -x + 2y &= 4 \end{cases}$$

qui s'écrit aussi,

$$\begin{cases} y &= 2x - 1 \\ y &= 0,5x + 2 \end{cases}$$

Soit $(\mathcal{D}_1)$ la représentation graphique de la fonction affine $f$ définie par $f(x) = 2x - y$ et soit $(\mathcal{D}_2)$ la représentation graphique de la fonction affine $g$ définie par $g(x) = -x + 2y$.




La solution du système est le couple $(2; 3)$.