Fonction inverse et étude de quotients, classe de seconde

F.Gaudon

21 mai 2017

Table des matières

1 Étude de la fonction inverse

Définition :

> On appelle fonction *inverse* la fonction f définie pour tout nombre réel appartenant à $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par
>
> $$f(x) = \frac{1}{x}$$

x	-4	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
$f(x)$	$\frac{-1}{4}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{-1}{2}$	-1	-2	$\|\|$	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

Variations :

La fonction inverse est :

- strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$;
- strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

$f(x)$	$-\infty$		0		$+\infty$
x	0	$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$	0

Preuve :

- Soient x_1 et x_2 deux nombres réels tels que $0 < x_1 \leq x_2$.
  On multiplie cette inégalité par $\frac{1}{x_1x_2}$ qui est positif.
  On a donc $\frac{x_1}{x_1x_2} < \frac{x_2}{x_1x_2}$
  c'est à dire $\frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1}$
  ce qui montre que la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.
- Soient x_1 et x_2 deux nombres réels tels que $x_1 < x_2 < 0$.
  On multiplie cette inégalité par $\frac{1}{x_1x_2}$ qui est positif.
  On a donc $\frac{x_1}{x_1x_2} < \frac{x_2}{x_1x_2}$
  c'est à dire $\frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1}$
  ce qui montre que la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

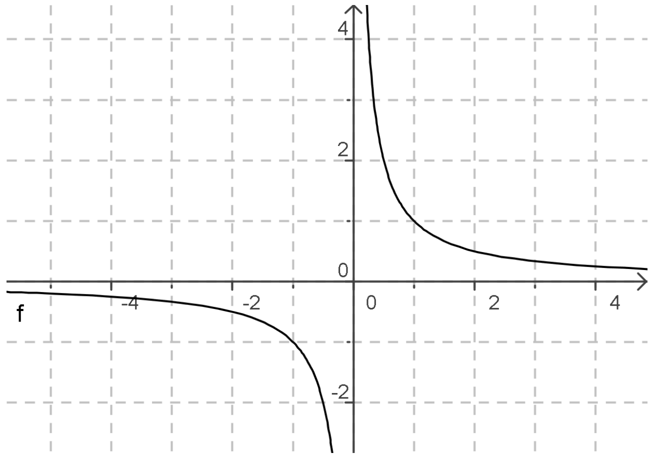
Signe :

La fonction inverse est négative sur $]-\infty; 0[$ et positive sur $]0; +\infty[$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\frac{1}{x}$		-	$\|\|$	$+$	

Représentation graphique :

La représentation graphique de la fonction inverse est appelée *hyperbole*.



Remarque :
Pour tout réel x, $f(-x) = -f(x)$. La fonction est dite *impaire*. Sa représentation graphique dans un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$ est symétrique par rapport à l'origine O du repère.

2 Étude de quotients

2.1 Valeurs interdites

Définition :

> on appelle *valeur interdite* d'une fonction f donnée, tout réel x n'appartenant pas à l'ensemble de définition de la fonction f.

Exemple :
f définie par $f(x) = \frac{3x+2}{-4x+5}$.
f n'est pas définie si et seulement si $-4x + 5 = 0$
c'est à dire $-4x = -5$ ou encore $x = \frac{5}{4}$.
$\frac{5}{4}$ est l'unique valeur interdite pour f
et l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R} - \{\frac{5}{4}\}$.

Propriété :

> Un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul.

2.2 Exemples de résolution d'équations quotients

1. On considère l'équation
$$\frac{3x+2}{5x+3}=0.$$
   - Recherche de la valeur interdite :
     $5x+3=0$ si et seulement si $5x=-3$ c'est à dire $x=\frac{-3}{5}$.
     $\frac{-3}{5}$ est donc la seule valeur interdite.
   - Résolution de l'équation quotient nul :
     On résout l'équation sur $]-\infty;\frac{-3}{5}[\cup]\frac{-3}{5};+\infty[$:
     On a $\frac{3x+2}{5x+3}=0$ si et seulement si $3x+2=0$ c'est à dire $3x+2=0$ donc $x=\frac{-2}{3}$.
     L'unique solution de l'équation est donc $\frac{-2}{3}$.
2. On considère l'équation
$$\frac{5x-2}{3x-1}=3.$$
   - Recherche des valeurs interdites :
     $3x-1=0$ donne $x=\frac{1}{3}$.
   - Résolution de l'équation :
$$\frac{5x-2}{3x-1}=\frac{3}{1}$$
     équivaut par un produit en croix à :
$$1(5x-2)=3(3x-1)$$
     c'est à dire $5x-2=9x-3$
     donc $5x-2+3=9x$ donc $1=9x-5x$ ou encore $1=4x$ donc $x=\frac{1}{4}$.
     L'unique solution est $\frac{1}{4}$.

2.3 Exemples d'étude de signe d'un quotient

On considère le quotient
$$\frac{3-2x}{x+1}$$
.

- On détermine les valeurs interdites :
  Ici $x+1=0$ c'est à dire $x=-1$.
- On étudie le signe du numérateur et du dénominateur :
  $3-2x=0$ pour $x=\frac{3}{2}$ et $x+1=0$ pour $x=-1$.

x	$-\infty$		-1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$3-2x$		$+$		$+$	0	-	
$x+1$		-	0	$+$		$+$	
$\frac{3-2x}{x+1}$		-	$\|$	$+$	0	-	

Pour $x\in]-\infty;-1[\cup]\frac{3}{2};+\infty[$, le quotient est strictement négatif.
Pour $x\in]-1;\frac{3}{2}[$, le quotient est strictement positif.

2.4 Exemple de résolution d'inéquation quotient

1. On considère l'inéquation $\frac{3-2x}{x+1} \geq 0$.
   D'après le tableau de signes précédent, l'ensemble des solutions est l'intervalle $]-1; \frac{3}{2}]$.
2. On considère l'inéquation
$$\frac{3x+1}{x-2} \leq 5$$
.
   - On détermine la valeur interdite : $x - 2 = 0$ donne $x = 2$.
   - On écrit l'inéquation sous la forme d'une inéquation quotient nul :
$$\frac{3x+1}{x-2} - 5 \leq 0$$
$$\frac{3x+1-5(x-2)}{x-2} \leq 0$$
$$\frac{3x+1-5x+10}{x-2} \leq 0$$
$$\frac{-2x+11}{x-2} \leq 0$$
   - On étudie le signe du quotient obtenu :
     $-2x + 11 = 0$ pour $x = \frac{11}{2}$

x	$-\infty$		2		5,5		$+\infty$
$-2x+11$		$+$		$+$	0	-	
$x-2$		-	0	$+$		$+$	
$\frac{-2x+11}{x-2}$		-	$\|$	$+$	0	-	

   - On détermine à partir du tableau les valeurs de x solutions de l'inéquation :
$$S = [-\infty; 2[\cup [5,5; +\infty[$$