Équations de droites, classe de 2nde

1 Notion d'équation de droites et équation réduite

Définition :

Soit $\mathcal{D}$ une droite dans le plan muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.
On appelle *équation de la droite* $(\mathcal{D})$ ....
....
....

Propriété :

Dans un repère, l'ensemble des points M de coordonnées $(x;y)$ telles que $y = mx + p$ avec m et p deux réels fixés est ....

Preuve :
Soit f la fonction affine définie par $f(x) = ax + b$ avec a et b réels. On sait que sa représentation graphique, c'est à dire l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $y = ax + b$ est ....

Théorème et définition :

Soit $(O;\vec{i};\vec{j})$ un repère et $\mathcal{D}$ une droite.

- Si $(\mathcal{D})$ .... alors elle admet une équation de la forme :

  ....

  appelée *équation réduite* avec :
  — ...... : nombre réel appelé ....
  — ...... : nombre réel appelé ....
- si $\mathcal{D}$ .... alors elle admet une équation de la forme :

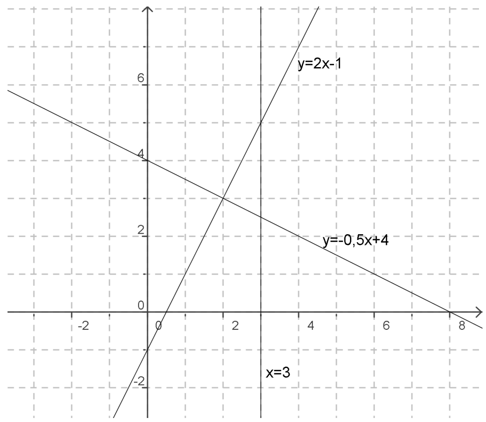
  ....

  avec k nombre réel tel que tous les points de la droite $(\mathcal{D})$ ont pour abscisse k.

Remarque :
Les droites parallèles à l'axe des abscisses ont une équation réduite de la forme $y = p$ où p est un réel.

Exemple :

On considère l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tels que $2y - 4x = 2$.
Cette équation s'écrit .... donc $y =$............ . L'ensemble des points M est donc une droite.
Pour la tracer :
Pour $x = 0$, $y =$.............. donc $A(......;.......)$ est un point de la droite.
Pour $x = 3$, $y =$.............. donc $B(......;.......)$ est un point de la droite.



Preuve :

- Soient A et B les points d'abscisses respectives 0 et 1 (ces points existent puisque la droite est supposée non parallèle à l'axe des ordonnées). Notons y_A et y_B leurs ordonnées respectives. On a donc $A(.....;......)$ et $B(......;......)$. Soit f la fonction affine définie par $f(x) = (y_B - y_A)x + y_A$. On a $f(0) =$ .... et $f(1) =$ .... donc la représentation graphique de f est la droite qui passe par A et B, c'est à dire la droite $\mathcal{D}$. Donc tout point vérifiant .... avec $m = y_B - y_A$ et $p = y_A$ se trouve sur $\mathcal{D}$ et tout point de $\mathcal{D}$ a ses coordonnées qui vérifient l'équation ....
- Soit k l'absisse du point M d'intersection de la droite avec l'axe des abscisses. Un point appartient à la droite si et seulement si il a la même abscisse que M c'est à dire si et seulement si ses coordonnées vérifient ....

Propriété :

Soient A et B de coordonnées $(x_A;y_A)$ et $(x_B;y_B)$ deux points tels que .... Alors la droite (AB) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, elle a donc une équation de la forme .... et on a :

$$m = \text{..........................}$$

et

$$p = \text{.....}$$

Preuve :

$x_A \neq x_B$ implique que la droite (AB) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées. En outre, on a $y_B =$ .... et $y_A =$ .... puisque A et B appartiennent à la droite. D'où $y_B - y_A = mx_B + p - (mx_A + p) = m(x_B - x_A)$ donc $m =$ ....

Exemple :

Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par les points A et B de coordonnées $(1;3)$ et $(-2;5)$.

$x_A \neq x_B$ donc $\mathcal{D}$ n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées. Son équation est donc de la forme ....
$m =$ ....
donc son équation est $y =$ ....
Or $A \in \mathcal{D}$ donc ses coordonnées vérifient l'équation d'où $3 =$ .... et $p =$ .... c'est à dire $p =$ ....
L'équation est donc ....

2 Parallélisme et systèmes d'équations

Propriété :

> Deux droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ d'équations réduites respectives $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$ sont parallèles si et seulement si ....

Preuve :
On considère les points A et B de la droite d'abscisses respectives 0 et 1. Ces deux points appartiennent à la droite $\mathcal{D}$ donc $y_A =$ .... $=$ .... $=$ .... et $y_B =$ .... $=$ .... $=$ .... Les coordonnées de A et B sont donc $(0;\ldots\ldots)$ et $(1;\ldots\ldots)$ respectivement. De même, les points A' et B' de coordonnées respectives $(0;\ldots\ldots)$ et $(1;\ldots\ldots)$ appartiennent à la droite $\mathcal{D}'$. D'où, le vecteur $\vec{AB}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \end{pmatrix}$ a la même direction que la droite $\mathcal{D}$ et le vecteur $\vec{A'B'}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \end{pmatrix}$ a la même direction que la droite $\mathcal{D}'$.

Les deux droites sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{A'B'}$ ont la même direction c'est à dire sont colinéaires c'est à dire encore si et seulement si $\frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$ ce qui s'écrit finalement $m = m'$.

Exemples :

- Soit (d) la droite d'équation réduite $y = 3x + 2$ et A le point de coordonnées $(4;5)$.
  On cherche l'équation de la droite (d') parallèle à (d) passant par A.
  (d') est parallèle à (d) donc admet une équation réduite .... et son coefficient directeur m est ....
  $A \in (d')$ donc .... d'où .... et ....
  D'où l'équation ....
- On considère les droites (d) et (d') d'équations respectives $y = -2x + 1$ et $y = x + 5$.
  Les coefficients directeurs sont différents donc les droites sont sécantes.
  Pour trouver les coordonnées $(x;y)$ du point d'intersection M, on résout le système d'équations :

  $$\begin{cases} y = -2x + 1 \\ y = x + 5 \end{cases}$$

  Ce système équivaut à :

$$\begin{cases} \ldots. \\ \ldots.. \end{cases}$$

donc à :

$$\begin{cases} \ldots. \\ \ldots.. \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} \ldots. \\ \ldots. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ldots. \\ \ldots... \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ldots. \\ \ldots.. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ldots. \\ \ldots. \end{cases}$$

Les coordonnées du point d'intersection sont donc $(\frac{-4}{3}; \frac{11}{3};)$.