Équations de droites, cours pour la classe de seconde

F.Gaudon

27 juin 2017

Table des matières

1 Notion d'équation de droites et équation réduite

Définition :

Soit $\mathcal{D}$ une droite dans le plan muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.
On appelle *équation de la droite* $(\mathcal{D})$ toute équation vérifiée par et uniquement par les coordonnées $(x;y)$ des points de la droite $(\mathcal{D})$.

Propriété :

Dans un repère, l'ensemble des points M de coordonnées $(x;y)$ telles que $y = mx + p$ avec m et p deux réels fixés est une droite.

Preuve :
Soit f la fonction affine définie par $f(x) = mx + p$. On sait que sa représentation graphique, c'est à dire l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $y = mx + p$ est une droite.

Théorème et définition :

Soit $(O;\vec{i};\vec{j})$ un repère et $\mathcal{D}$ une droite.

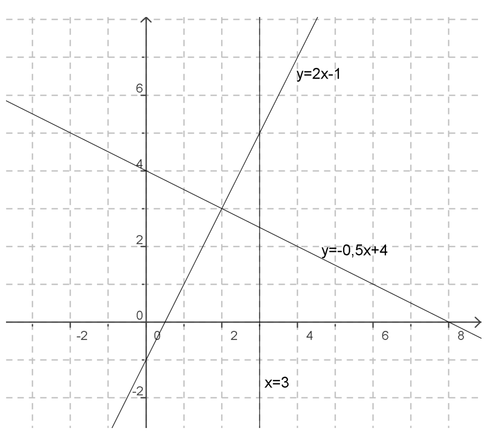
- Si $(\mathcal{D})$ n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées alors elle admet une équation de la forme :

$$y = mx + p$$

  appelée *équation réduite* avec :
  — m : nombre réel appelé *coefficient directeur*.
  — p : nombre réel appelé *ordonnée à l'origine*.
- si $(\mathcal{D})$ est parallèle à l'axe des ordonnées elle admet une équation de la forme :

$$x = k$$

  avec k nombre réel tel que tous les points de la droite $(\mathcal{D})$ ont pour abscisse k.



Preuve :

- Soient A et B les points d'abscisses respectives 0 et 1 (ces points existent puisque la droite est supposée non parallèle à l'axe des ordonnées). Notons y_A et y_B leurs ordonnées respectives. On a donc $A(0; y_A)$ et $B(1; y_B)$. Soit f la fonction affine définie par $f(x) = (y_B - y_A)x + y_A$. On a $f(0) = y_A$ et $f(1) = y_B$ donc la représentation graphique de f est la droite qui passe par A et B, c'est à dire la droite $\mathcal{D}$. Donc tout point vérifiant $y = mx + p$ avec $m = y_B - y_A$ et $p = y_A$ se trouve sur $\mathcal{D}$ et tout point de $\mathcal{D}$ a ses coordonnées qui vérifient l'équation $y = mx + p$.
- Soit k l'absisse du point M d'intersection de la droite avec l'axe des abscisses. Un point appartient à la droite si et seulement si il a la même abscisse que M c'est à dire si et seulement si ses coordonnées vérifient $x = k$.

Propriété :

Soient A et B de coordonnées $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$ deux points tels que $x_A \neq x_B$. Alors la droite (AB) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, elle a donc une équation de la forme $y = mx + p$ et on a :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Preuve :

$x_A \neq x_B$ implique que la droite (AB) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées. En outre, on a $y_B = mx_B + p$ et $y_A = mx_A + p$ puisque A et B appartiennent à la droite. D'où $y_B - y_A = mx_B + p - (mx_A + p) = m(x_B - x_A)$ donc $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Exemple :

Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par les points A et B de coordonnées $(1; 3)$ et $(-2; 5)$.

$x_A \neq x_B$ donc $\mathcal{D}$ n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées. Son équation est donc de la forme $y = mx + p$.

$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5-3}{(-2)-1} = \frac{-2}{3}$

donc son équation est $y = \frac{-2}{3}x + b$.

Or $A \in \mathcal{D}$ donc ses coordonnées vérifient l'équation d'où $3 = \frac{-2}{3} \times 1 + p$. et $p = 3 + \frac{2}{3}$ c'est à dire $p = \frac{11}{3}$.

L'équation est donc $y = \frac{-2}{3}x + \frac{11}{3}$.

Algorithmique :

Algorithme qui affiche l'équation d'une droite passant par deux points A et B de coordoonnées $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$ donnés :

```
Données : x_A, y_A, x_B, y_B
Début traitement
    si x_A ≠ x_B alors
        m prend la valeur de (y_B − y_A)/(x_B − x_A)
        p prend la valeur de y_A − m x_A
        Afficher y = mx + p
    sinon
        Afficher x = x_A
    fin
Fin
```

Exemple :

Soit (d) la droite passant par $A(1;3)$ et $B(-2;5)$. Pout TI et casio, on notera E pour $x_A = 1$, F pour $y_A = 3$, G pour $x_B = -2$ et H pour $y_B = 5$ pour cause de limitations techniques dans les possibilités pour nommer un les variables.

TI :	**Casio :**	**XCas :**

Prompt E,F,G, H
If $E <> G$
Then
$(H-F)/(G-E) \triangleright M$
$F - M * E \triangleright P$
Disp "M=",M
Disp "P=",P
Else
Disp "x=",E
End
	"E" :?→ E
	"F" :?→ F
	"G" :?→ G
	"H" :?→ H
	If $E <> G$
	Then
	$(H-F)/(G-E) \to M$
	$F - M * E \to P$
	"M" :M◢
	"P" :P◢
	Else
	"X =" :E◢
	ifEnd
		
		saisir("xA =",xA);
		saisir("yA =",yA);
		saisir("xB =",xB);
		saisir"(yB =",yB);
		if (xA!=xB) faire
		  m:=(yB-yA)/(xB-xA);
		  p:=yA-m*xA;
		  afficher("m=",m);
		  afficher("p=",p);
		sinon
		  afficher("x=",xA);
		fsi;

2 Parallélisme et systèmes d'équations

Propriété :

> Deux droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ d'équations réduites respectives $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$ sont parallèles si et seulement si $m = m'$.

Preuve :
On considère les points A et B de coordonnées respectives $(0; p)$ et $(1; m + p)$. Ces deux points appartiennent àla droite $\mathcal{D}$ car $m \times x_A + p = m \times 0 + p = p = y_A$ et $m \times x_B + p = m + p = y_B$. De même, les points A' et B' de coordonnées respectives $(0; p')$ et $(1; m' + p')$ appartiennent à ma droite $\mathcal{D}'$. D'où, le vecteur $\vec{AB}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ a la même direction que la droite $\mathcal{D}$ et le vecteur $A'\vec{B}'$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ m' \end{pmatrix}$ a la même direction que la droite $\mathcal{D}'$.

Les deux droites sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\vec{AB}$ et $A'\vec{B}'$ ont la même direction c'est à dire sont colinéaires c'est à dire encore si et seulement si $1 \times m = 1 \times m'$ ce qui s'écrit finalement $m = m'$.

Exemples :

- Soit (d) la droite d'équation réduite $y = 3x + 2$ et A le point de coordonnées $(4; 5)$.
  On cherche l'équation de la droite (d') parallèle à (d) passant par A.
  (d') est parallèle à (d) donc admet une équation réduite $y = mx + p$ et son coefficient directeur m est 3 .
  $A \in (d')$ donc $y_A = 3x_A + p$ d'où $5 = 3 \times 4 + p$ et $p = 5 - 12 = -7$.
  D'où l'équation $y = 3x - 7$.
- On considère les droit On considère les droites (d) et (d') d'équations respectives $y = -2x + 1$ et $y = x + 5$.
  Les coefficients directeurs sont différents donc les droites sont sécantes.
  Pour trouver les coordonnées $(x; y)$ du point d'intersection M, on résout le système d'équations :

  $$\begin{cases} y = -2x + 1 \\ y = x + 5 \end{cases}$$

  Ce système équivaut à :

$$\begin{cases} y = -2x+1 \\ -2x+1 = x+5 \end{cases}$$

donc à :

$$\begin{cases} y = -2x+1 \\ -2x-x = 5-1 \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} y = -2x+1 \\ -3x = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2x+1 \\ x = \dfrac{-4}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2\dfrac{-4}{3}+1 \\ x = \dfrac{-4}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{11}{3} \\ x = \dfrac{-4}{3} \end{cases}$$

Les coordonnées du point d'intersection sont donc $(\frac{-4}{3}; \frac{11}{3};)$.