Fonctions polynômes du second degré, cours, 2nde

Fonctions polynômes du second degré, cours, 2nde

F.Gaudon

http://mathsfg.net.free.fr

8 juin 2014

Définition :
On appelle *fonction polynôme du second degré* toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et qui s'écrit $f(x) =$

Définition :
On appelle *fonction polynôme du second degré* toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et qui s'écrit $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels fixés et $a \neq 0$.

Propriété et définition :
Toute fonction polynôme du second degré f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$ s'écrit aussi :

Propriété et définition :
Toute fonction polynôme du second degré f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$ s'écrit aussi :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

où

$$\alpha =$$

Propriété et définition :
Toute fonction polynôme du second degré f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$ s'écrit aussi :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

où

$$\alpha = \frac{-b}{2a}$$

(prononcer « alpha »)

$$\beta =$$

Propriété et définition :
Toute fonction polynôme du second degré f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$ s'écrit aussi :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

où

$$\alpha = \frac{-b}{2a}$$

(prononcer « alpha »)

$$\beta = f(\alpha)$$

(prononcer « beta »)
Cette écriture est appelée

Propriété et définition :
Toute fonction polynôme du second degré f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$ s'écrit aussi :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

où

$$\alpha = \frac{-b}{2a}$$

(prononcer « alpha »)

$$\beta = f(\alpha)$$

(prononcer « beta »)
Cette écriture est appelée *forme canonique* de la fonction f.

Exemple :
Soit f la fonction définie par $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$.

- On a $\alpha =$

Exemple :
Soit f la fonction définie par $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$.

- On a $\alpha = \frac{-b}{2a} =$

Exemple :
Soit f la fonction définie par $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$.

- On a $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2 \times 3} =$

Exemple :
Soit f la fonction définie par $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$.

- On a $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2\times 3} = \frac{6}{6} = 1$

Exemple :
Soit f la fonction définie par $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$.

- On a $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2\times 3} = \frac{6}{6} = 1$
- En outre, $f(\alpha) =$

Exemple :
Soit f la fonction définie par $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$.

- On a $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2\times3} = \frac{6}{6} = 1$
- En outre, $f(\alpha) = f(1) =$

Exemple :
Soit f la fonction définie par $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$.

- On a $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2\times 3} = \frac{6}{6} = 1$
- En outre, $f(\alpha) = f(1) = 3 \times 1^2 - 6 \times 1 + 1 =$

Exemple :
Soit f la fonction définie par $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$.

- On a $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2\times 3} = \frac{6}{6} = 1$
- En outre, $f(\alpha) = f(1) = 3 \times 1^2 - 6 \times 1 + 1 = 3 - 6 + 1 = -2$

Exemple :
Soit f la fonction définie par $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$.

- On a $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2\times 3} = \frac{6}{6} = 1$
- En outre, $f(\alpha) = f(1) = 3 \times 1^2 - 6 \times 1 + 1 = 3 - 6 + 1 = -2$
- On vérifie donc que $3(x-1)^2 - 2 =$

Exemple :
Soit f la fonction définie par $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$.

- On a $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2\times3} = \frac{6}{6} = 1$
- En outre, $f(\alpha) = f(1) = 3 \times 1^2 - 6 \times 1 + 1 = 3 - 6 + 1 = -2$
- On vérifie donc que $3(x-1)^2 - 2 = 3(x^2 - 2x + 1) - 2 =$

Exemple :
Soit f la fonction définie par $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$.

- On a $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2\times3} = \frac{6}{6} = 1$
- En outre, $f(\alpha) = f(1) = 3 \times 1^2 - 6 \times 1 + 1 = 3 - 6 + 1 = -2$
- On vérifie donc que $3(x-1)^2 - 2 = 3(x^2 - 2x + 1) - 2 = 3x^2 - 6x + 3 - 2 =$

Exemple :
Soit f la fonction définie par $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$.

- On a $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2\times 3} = \frac{6}{6} = 1$
- En outre, $f(\alpha) = f(1) = 3 \times 1^2 - 6 \times 1 + 1 = 3 - 6 + 1 = -2$
- On vérifie donc que $3(x-1)^2 - 2 = 3(x^2 - 2x + 1) - 2 = 3x^2 - 6x + 3 - 2 = 3x^2 - 6x + 1 =$

Exemple :
Soit f la fonction définie par $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$.

- On a $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2\times 3} = \frac{6}{6} = 1$
- En outre, $f(\alpha) = f(1) = 3 \times 1^2 - 6 \times 1 + 1 = 3 - 6 + 1 = -2$
- On vérifie donc que $3(x-1)^2 - 2 = 3(x^2 - 2x + 1) - 2 = 3x^2 - 6x + 3 - 2 = 3x^2 - 6x + 1 = f(x)$

Exemple :
Soit f la fonction définie par $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$.

- On a $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2\times3} = \frac{6}{6} = 1$
- En outre, $f(\alpha) = f(1) = 3 \times 1^2 - 6 \times 1 + 1 = 3 - 6 + 1 = -2$
- On vérifie donc que $3(x-1)^2 - 2 = 3(x^2 - 2x + 1) - 2 = 3x^2 - 6x + 3 - 2 = 3x^2 - 6x + 1 = f(x)$

Donc $3(x-1)^2 - 2$ est bien la

Exemple :
Soit f la fonction définie par $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$.

- On a $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2 \times 3} = \frac{6}{6} = 1$
- En outre, $f(\alpha) = f(1) = 3 \times 1^2 - 6 \times 1 + 1 = 3 - 6 + 1 = -2$
- On vérifie donc que $3(x-1)^2 - 2 = 3(x^2 - 2x + 1) - 2 = 3x^2 - 6x + 3 - 2 = 3x^2 - 6x + 1 = f(x)$

Donc $3(x-1)^2 - 2$ est bien la forme canonique de $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$.

Propriété :
Pour toute fonction polynôme du second degré $f \mapsto ax^2 + bx + c$,

- si $a > 0$ la fonction f est strictement

Propriété :
Pour toute fonction polynôme du second degré $f \mapsto ax^2 + bx + c$,

- si $a > 0$ la fonction f est strictement décroissante puis strictement

Propriété :
Pour toute fonction polynôme du second degré $f \mapsto ax^2 + bx + c$,

- si $a > 0$ la fonction f est strictement décroissante puis strictement croissante et admet un minimum en $x =$

Propriété :
Pour toute fonction polynôme du second degré $f \mapsto ax^2 + bx + c$,

- si $a > 0$ la fonction f est strictement décroissante puis strictement croissante et admet un minimum en $x = \alpha = \frac{-b}{2a}$.

Propriété :
Pour toute fonction polynôme du second degré $f \mapsto ax^2 + bx + c$,

- si $a > 0$ la fonction f est strictement décroissante puis strictement croissante et admet un minimum en $x = \alpha = \frac{-b}{2a}$.
- si $a < 0$ la fonction f est strictement

Propriété :
Pour toute fonction polynôme du second degré $f \mapsto ax^2 + bx + c$,

- si $a > 0$ la fonction f est strictement décroissante puis strictement croissante et admet un minimum en $x = \alpha = \frac{-b}{2a}$.
- si $a < 0$ la fonction f est strictement croissante puis strictement

Propriété :
Pour toute fonction polynôme du second degré $f \mapsto ax^2 + bx + c$,

- si $a > 0$ la fonction f est strictement décroissante puis strictement croissante et admet un minimum en $x = \alpha = \frac{-b}{2a}$.
- si $a < 0$ la fonction f est strictement croissante puis strictement décroissante et admet un maximum en $x =$

Propriété :
Pour toute fonction polynôme du second degré $f \mapsto ax^2 + bx + c$,

- si $a > 0$ la fonction f est strictement décroissante puis strictement croissante et admet un minimum en $x = \alpha = \frac{-b}{2a}$.
- si $a < 0$ la fonction f est strictement croissante puis strictement décroissante et admet un maximum en $x = \alpha = \frac{-b}{2a}$.

Synthèse :

Si $a > 0$,

Synthèse :
Si $a > 0$,

x	

Synthèse :
Si $a > 0$,

x	$-\infty$	α	$+\infty$

Synthèse :

Si $a > 0$,

x	$-\infty$	α	$+\infty$

Synthèse :
Si $a > 0$,

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Synthèse :

Si $a > 0$,

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	

Synthèse :
Si $a > 0$,

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	

et si $a < 0$,

Synthèse :

Si $a > 0$,

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	
			$f(\alpha)$		

et si $a < 0$,

Synthèse :

Si $a > 0$,

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	

et si $a < 0$,

x	$-\infty$	α	$+\infty$

Synthèse :
Si $a > 0$,

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	
			$f(\alpha)$		

et si $a < 0$,

x	$-\infty$		α		$+\infty$
			$f(\alpha)$		
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Exemple :
Dans l'exemple précédent $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$. On a vu que
$\alpha =$

Exemple :
Dans l'exemple précédent $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$. On a vu que $\alpha = \frac{-b}{2a} = 1$ et $f(1) =$

Exemple :
Dans l'exemple précédent $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$. On a vu que $\alpha = \frac{-b}{2a} = 1$ et $f(1) = -2$. Par ailleurs, $a =$

Exemple :
Dans l'exemple précédent $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$. On a vu que $\alpha = \frac{-b}{2a} = 1$ et $f(1) = -2$. Par ailleurs, $a = 3$. a est

Exemple :
Dans l'exemple précédent $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$. On a vu que $\alpha = \frac{-b}{2a} = 1$ et $f(1) = -2$. Par ailleurs, $a = 3$. a est positif donc on a le tableau de variations suivant :

x

Exemple :

Dans l'exemple précédent $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$. On a vu que $\alpha = \frac{-b}{2a} = 1$ et $f(1) = -2$. Par ailleurs, $a = 3$. a est positif donc on a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	1	$+\infty$

Exemple :
Dans l'exemple précédent $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$. On a vu que $\alpha = \frac{-b}{2a} = 1$ et $f(1) = -2$. Par ailleurs, $a = 3$. a est positif donc on a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	-2	$\nearrow$	

Exemple :
Dans l'exemple précédent $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$. On a vu que $\alpha = \frac{-b}{2a} = 1$ et $f(1) = -2$. Par ailleurs, $a = 3$. a est positif donc on a le tableau de variations suivant :

x	-∞		1		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	-2	$\nearrow$	

Propriété :
Dans un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$ du plan, la représentation graphique de la fonction trinôme du second degré f est une *parabole* dont le point S de coordonnées

Propriété :
Dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ du plan, la représentation graphique de la fonction trinôme du second degré f est une *parabole* dont le point S de coordonnées $(\alpha; f(\alpha))$ est le *sommet*.

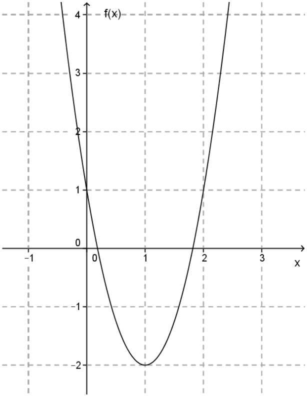
Exemple :
On a vu que pour $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$, on a $\alpha =$

Exemple :
On a vu que pour $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$, on a $\alpha = \frac{-b}{2a} = 1$ et $f(1) =$

Exemple :
On a vu que pour $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$, on a $\alpha = \frac{-b}{2a} = 1$ et $f(1) = -2$ donc le point S de coordonnées

Exemple :
On a vu que pour $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$, on a $\alpha = \frac{-b}{2a} = 1$ et $f(1) = -2$ donc le point S de coordonnées $(1; -2)$ est le sommet de la parabole représentant la fonction f.

Exemple :
On a vu que pour $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$, on a $\alpha = \frac{-b}{2a} = 1$ et $f(1) = -2$ donc le point S de coordonnées $(1; -2)$ est le sommet de la parabole représentant la fonction f.


f(x)
4
3
2
1
0
−1
−2
−1
0
1
2
3
x

Propriété :
Un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.

Exemple 1 de résolution d’équations du second degré : :
$(3x+2)(4x-3)=0$ dans $\mathbb{R}$.

Exemple 1 de résolution d'équations du second degré : :
$(3x+2)(4x-3)=0$ dans $\mathbb{R}$.
D'après la propriété, $3x+2=0$ ou $4x-3=0$.

Exemple 1 de résolution d'équations du second degré : :
$(3x+2)(4x-3)=0$ dans $\mathbb{R}$.
D'après la propriété, $3x+2=0$ ou $4x-3=0$.
C'est à dire $3x=-2$ ou $4x=3$

Exemple 1 de résolution d'équations du second degré : :
$(3x+2)(4x-3)=0$ dans $\mathbb{R}$.
D'après la propriété, $3x+2=0$ ou $4x-3=0$.
C'est à dire $3x=-2$ ou $4x=3$
donc $x=\frac{-2}{3}$ ou $x=\frac{3}{4}$.

Exemple 1 de résolution d'équations du second degré : :
$(3x+2)(4x-3)=0$ dans $\mathbb{R}$.
D'après la propriété, $3x+2=0$ ou $4x-3=0$.
C'est à dire $3x=-2$ ou $4x=3$
donc $x=\frac{-2}{3}$ ou $x=\frac{3}{4}$.
L'équation $(3x+2)(4x-3)=0$ a donc deux solutions : $\frac{-2}{3}$ et $\frac{3}{4}$.

Exemple 2 : :
$(3x+2)(2x+1) - x(3x+2) = 0$ dans $\mathbb{R}$.

Exemple 2 : :
$(3x+2)(2x+1) - x(3x+2) = 0$ dans $\mathbb{R}$.
L'équation n'est pas factorisée.

Exemple 2 : :
$(3x+2)(2x+1) - x(3x+2) = 0$ dans $\mathbb{R}$.
L'équation n'est pas factorisée.
La développer ne permet pas de résoudre car on obtient $3x^2 + 5x + 2 = 0$ qu'on ne sait pas résoudre.

Exemple 2 : :
$(3x+2)(2x+1) - x(3x+2) = 0$ dans $\mathbb{R}$.
L'équation n'est pas factorisée.
La développer ne permet pas de résoudre car on obtient
$3x^2 + 5x + 2 = 0$ qu'on ne sait pas résoudre.
On factorise :

Exemple 2 : :
$(3x+2)(2x+1)-x(3x+2)=0$ dans $\mathbb{R}$.
L'équation n'est pas factorisée.
La développer ne permet pas de résoudre car on obtient $3x^2+5x+2=0$ qu'on ne sait pas résoudre.
On factorise :
on obtient $(3x+2)(2x+1-x)=0$

Exemple 2 : :
$(3x+2)(2x+1)-x(3x+2)=0$ dans $\mathbb{R}$.
L’équation n’est pas factorisée.
La développer ne permet pas de résoudre car on obtient
$3x^2+5x+2=0$ qu’on ne sait pas résoudre.
On factorise :
on obtient $(3x+2)(2x+1-x)=0$
c’est à dire $(3x+2)(x+1)=0$

Exemple 2 : :
$(3x+2)(2x+1)-x(3x+2)=0$ dans $\mathbb{R}$.
L'équation n'est pas factorisée.
La développer ne permet pas de résoudre car on obtient $3x^2+5x+2=0$ qu'on ne sait pas résoudre.
On factorise :
on obtient $(3x+2)(2x+1-x)=0$
c'est à dire $(3x+2)(x+1)=0$
qui donne $3x+2=0$ ou $x+1=0$ donc $x=\frac{-2}{3}$ ou $x=-1$.

Exemple 3 : :
$x^2 + 4x + 4 = 0$ dans $\mathbb{R}$.

Exemple 3 : :
$x^2 + 4x + 4 = 0$ dans $\mathbb{R}$.
L'équation n'est pas factorisée.

Exemple 3 : :
$x^2 + 4x + 4 = 0$ dans $\mathbb{R}$.
L'équation n'est pas factorisée.
Pas de facteur commun mais une identité remarquable :
$x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$.

Exemple 3 : :
$x^2 + 4x + 4 = 0$ dans $\mathbb{R}$.
L'équation n'est pas factorisée.
Pas de facteur commun mais une identité remarquable :
$x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$.
On résout $(x + 2)^2 = 0$

Exemple 3 : :

$x^2 + 4x + 4 = 0$ dans $\mathbb{R}$.
L'équation n'est pas factorisée.
Pas de facteur commun mais une identité remarquable :
$x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$.
On résout $(x + 2)^2 = 0$
qui donne $x + 2 = 0$ donc $x = -2$.