

Second degré, cours, 2nde

F.Gaudon

8 juin 2014

Table des matières

1 Définition et forme canonique	2
2 Étude des variations	2
3 Représentation graphique	4
4 Résolution d'équations produits	4

1 Définition et forme canonique

Définition :

On appelle *fonction polynôme du second degré* toute fonction f définie sur \mathbb{R} et qui s'écrit $f(x) = \dots\dots\dots$ où a, b et c sont des réels fixés et $a \neq 0$.

Propriété et définition :

Toute fonction polynôme du second degré f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$ s'écrit aussi :

$\dots\dots\dots$

où

$\dots\dots\dots$

(prononcer « alpha »)

$\dots\dots\dots$

(prononcer « beta »)

Cette écriture est appelée $\dots\dots\dots$ de la fonction f .

Exemple :

Soit f la fonction définie par $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$.

On a $\alpha = \dots\dots\dots$

et $f(\alpha) = \dots\dots\dots$

On vérifie que $3(x - 1)^2 - 2 = \dots\dots\dots$

Donc $3(x - 1)^2 - 2$ est bien la forme $\dots\dots\dots$ associée à $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$.

2 Étude des variations

Propriété :

Pour toute fonction polynôme du second degré $f \mapsto ax^2 + bx + c$,

- si $a > 0$ la fonction f est strictement $\dots\dots\dots$ puis strictement $\dots\dots\dots$ et admet un minimum en $x = \dots\dots\dots$
- si $a < 0$ la fonction f est strictement $\dots\dots\dots$ puis strictement $\dots\dots\dots$ et admet un maximum en $x = \dots\dots\dots$



Synthèse :

Si $a > 0$,

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$		

et si $a < 0$,

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$		

Preuve :

Supposons $a < 0$, l'autre cas se traiterait de la même manière. On a $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ où a , α et β sont des réels avec $a \neq 0$.

- Soient x_1 et x_2 deux réels de l'intervalle $] - \infty; \alpha]$ et tels que $x_1 < x_2$. On a donc $x_1 - \alpha \dots x_2 - \alpha \leq 0$. Comme la fonction carré est strictement sur $] - \infty; 0]$, on a donc $(x_1 - \alpha)^2 \dots (x_2 - \alpha)^2$ d'où en multipliant par le nombre a , $a(x_1 - \alpha)^2 \dots a(x_2 - \alpha)^2$ et $a(x_1 - \alpha)^2 + \beta \dots a(x_2 - \alpha)^2 + \beta$ c'est à dire $f(x_1) \dots f(x_2)$ ce qui justifie que la fonction est strictement sur $] - \infty; \alpha]$.
- Soient x_1 et x_2 deux réels de l'intervalle $[\alpha; +\infty[$ et tels que $x_1 < x_2$. On a donc $0 \leq x_1 - \alpha \dots x_2 - \alpha$. Comme la fonction carré est strictement sur $[0; +\infty[$, on a donc $(x_1 - \alpha)^2 \dots (x_2 - \alpha)^2$ d'où en multipliant par le nombre a négatif, $a(x_1 - \alpha)^2 \dots a(x_2 - \alpha)^2$ et $a(x_1 - \alpha)^2 + \beta \dots a(x_2 - \alpha)^2 + \beta$ c'est à dire $f(x_1) \dots f(x_2)$ ce qui justifie que la fonction est strictement sur $[\alpha; +\infty[$.

On a donc bien un maximum pour $x = \dots$ et ce maximum est $f(\dots) = \dots$.

Exemple :

Dans l'exemple précédent $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$. On a vu que $\alpha = \dots$ et $f(\dots) = \dots$. Par ailleurs, $a = 3$. a est positif donc on a le tableau de variations suivants :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$		

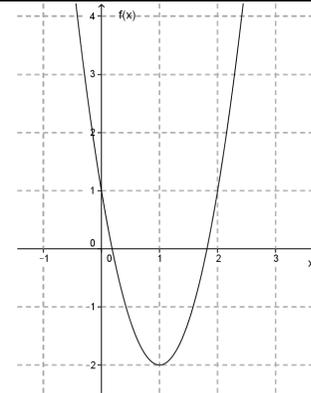
3 Représentation graphique

Propriété et définition :

Dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ du plan, la représentation graphique de la fonction trinôme du second degré f est appelée une dont le point S de coordonnées est le sommet.

Exemple :

On a vu que pour $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$, on a $\alpha = \dots$ et $f(\dots) = \dots$ donc le point S de coordonnées est le sommet de la parabole représentant la fonction f .



4 Résolution d'équations produits

Propriété :

Un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.

Exemples de résolution d'équations du second degré :

- Résolution de l'équation $(3x + 2)(4x - 3) = 0$ dans l'ensemble des réels. D'après la propriété énoncée, ou c'est à dire ou donc encore $x = \dots$ ou $x = \dots$. L'équation $(3x + 2)(4x - 3) = 0$ a donc pour solutions et
- Résolution de l'équation $(3x + 2)(2x - 1) - x(3x + 2) = 0$ dans l'ensemble des réels. Ici, l'équation n'est pas factorisée. La développer ne permet pas de résoudre l'équation car on trouve $3x^2 - x - 2 = 0$ qu'on ne sait pas résoudre. Il faut donc la factoriser : l'équation donne alors c'est à dire $(3x + 2)(x - 1) = 0$ qui se résout en utilisant la propriété énoncé ci-dessus. On a donc ou donc $x = \dots$ ou $x = \dots$.
- Résolution de l'équation $x^2 + 4x + 4 = 0$. Ici encore, l'équation n'est pas factorisée. Il n'y a pas de facteur commun mais une identité remarquable apparaît On résout donc l'équation qui donne donc