Produit d'un vecteur par un réel

Produit d'un vecteur par un réel, classe de seconde

F.Gaudon

http://mathsfg.net.free.fr

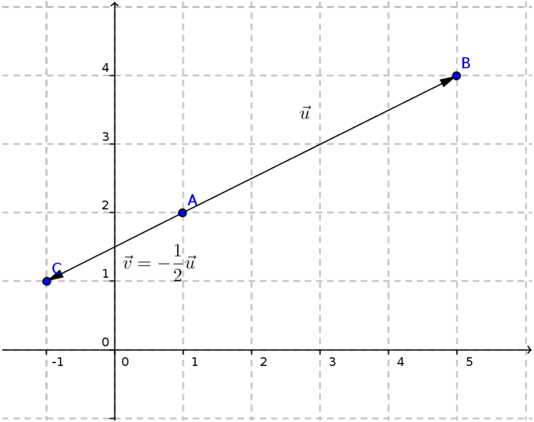
8 avril 2012

1. Produit d'un vecteur par un réel

2. Traduction de propriétés géométriques
   - Milieux de segments
   - Alignement et parallélisme

Définition :

Soit $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère du plan. Soit $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées $(x; y)$ dans ce repère. Soit k un nombre réel. On appelle *vecteur produit de $\vec{u}$ par k*, le vecteur de coordonnées $(kx; ky)$ dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.


B
A
C
$\vec{u}$
$\vec{v} = -\frac{1}{2}\vec{u}$
4
3
2
1
0
-1
0
1
2
3
4
5

Propriétés :

Soient k, k' deux nombres réels et $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs.

Propriétés :

Soient k, k' deux nombres réels et $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs.

- $k\vec{u} + k'\vec{u} = (k + k')\vec{u}$

Propriétés :

Soient k, k' deux nombres réels et $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs.

- $k\vec{u} + k'\vec{u} = (k + k')\vec{u}$
- $k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$

Propriétés :

Soient k, k' deux nombres réels et $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs.

- $k\vec{u} + k'\vec{u} = (k + k')\vec{u}$
- $k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$
- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$

Propriétés :

Soient k, k' deux nombres réels et $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs.

- $k\vec{u} + k'\vec{u} = (k + k')\vec{u}$
- $k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$
- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
- $k\vec{u} = 0$ si et seulement si $k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$

Exemple 1 :
Soit $(O;\vec{i};\vec{j})$ un repère du plan. Soit $\vec{u}$ tel que
$\vec{u} = 3(\vec{i} + 2\vec{j}) - 5\vec{i} + 3\vec{j}$.
Alors :

Exemple 1 :
Soit $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère du plan. Soit $\vec{u}$ tel que
$\vec{u} = 3(\vec{i} + 2\vec{j}) - 5\vec{i} + 3\vec{j}$.
Alors :
$\vec{u} = 3\vec{i} + 6\vec{j} - 5\vec{i} + 3\vec{j}$

Exemple 1 :
Soit $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère du plan. Soit $\vec{u}$ tel que
$\vec{u} = 3(\vec{i} + 2\vec{j}) - 5\vec{i} + 3\vec{j}$.
Alors :
$\vec{u} = 3\vec{i} + 6\vec{j} - 5\vec{i} + 3\vec{j}$
donc $\vec{u} = 3\vec{i} + 6\vec{j} - 5\vec{i} + 3\vec{j}$

Exemple 1 :
Soit $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère du plan. Soit $\vec{u}$ tel que
$\vec{u} = 3(\vec{i} + 2\vec{j}) - 5\vec{i} + 3\vec{j}$.
Alors :
$\vec{u} = 3\vec{i} + 6\vec{j} - 5\vec{i} + 3\vec{j}$
donc $\vec{u} = 3\vec{i} + 6\vec{j} - 5\vec{i} + 3\vec{j}$
et $\vec{u} = -2\vec{i} + 9\vec{j}$.

Exemple 1 :
Soit $(O;\vec{i};\vec{j})$ un repère du plan. Soit $\vec{u}$ tel que
$\vec{u} = 3(\vec{i} + 2\vec{j}) - 5\vec{i} + 3\vec{j}$.
Alors :
$\vec{u} = 3\vec{i} + 6\vec{j} - 5\vec{i} + 3\vec{j}$
donc $\vec{u} = 3\vec{i} + 6\vec{j} - 5\vec{i} + 3\vec{j}$
et $\vec{u} = -2\vec{i} + 9\vec{j}$.
Donc $\vec{u}$ a pour coordonnées $(-2; 9)$ dans $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Exemple 2 :
Soient A, B et C trois points et $\vec{u}$ tel que $\vec{u} = 3\vec{AC} + 3\vec{CB} - \vec{BA}$.
Alors :

Exemple 2 :
Soient A, B et C trois points et $\vec{u}$ tel que $\vec{u} = 3\vec{AC} + 3\vec{CB} - \vec{BA}$.
Alors :
$\vec{u} = 3(\vec{AC} + \vec{CB}) - \vec{BA}$

Exemple 2 :
Soient A, B et C trois points et $\vec{u}$ tel que $\vec{u} = 3\vec{AC} + 3\vec{CB} - \vec{BA}$.
Alors :
$\vec{u} = 3(\vec{AC} + \vec{CB}) - \vec{BA}$
donc $\vec{u} = 3\vec{AB} - \vec{BA}$

Exemple 2 :
Soient A, B et C trois points et $\vec{u}$ tel que $\vec{u} = 3\vec{AC} + 3\vec{CB} - \vec{BA}$.
Alors :
$\vec{u} = 3(\vec{AC} + \vec{CB}) - \vec{BA}$
donc $\vec{u} = 3\vec{AB} - \vec{BA}$
d'où $\vec{u} = 3\vec{AB} + \vec{AB}$

Exemple 2 :
Soient A, B et C trois points et $\vec{u}$ tel que $\vec{u} = 3\vec{AC} + 3\vec{CB} - \vec{BA}$.
Alors :
$\vec{u} = 3(\vec{AC} + \vec{CB}) - \vec{BA}$
donc $\vec{u} = 3\vec{AB} - \vec{BA}$
d'où $\vec{u} = 3\vec{AB} + \vec{AB}$
et $\vec{u} = 4\vec{AB}$.

Exemple 2 :
Soient A, B et C trois points et $\vec{u}$ tel que $\vec{u} = 3\vec{AC} + 3\vec{CB} - \vec{BA}$.
Alors :
$\vec{u} = 3(\vec{AC} + \vec{CB}) - \vec{BA}$
donc $\vec{u} = 3\vec{AB} - \vec{BA}$
d'où $\vec{u} = 3\vec{AB} + \vec{AB}$
et $\vec{u} = 4\vec{AB}$.
Ceci permet de tracer simplement le vecteur $\vec{u}$.

Exemple de placement de point vérifiant une égalité vectorielle :

Soient A, B et C trois points. Soit M le point défini par : $\vec{AM} = 3\vec{BC} - 2\vec{AC}$. Exprimons $\vec{AM}$ en fonction de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$:

$$\begin{aligned} \vec{AM} &= 3(\vec{BA} + \vec{AC}) - 2\vec{AC} \\ &= 3\vec{BA} + 3\vec{AC} - 2\vec{AC} \\ &= 3\vec{BA} + \vec{AC} \\ &= -3\vec{AB} + \vec{AC} \end{aligned}$$

Plan

Propriété :

Soient A, B et I trois points. I est le milieu du segment $[AB]$ si et seulement si $\vec{AI} = \vec{IB}$ si et seulement si $\vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AB}$.

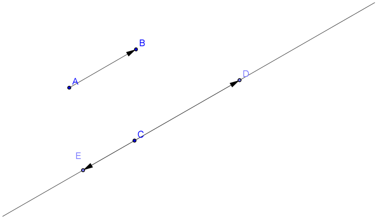
Plan

1. Produit d'un vecteur par un réel

2. Traduction de propriétés géométriques
    - Milieux de segments
    - Alignement et parallélisme

Définition :

Deux vecteurs non nuls sont *colinéaires* si il existe un réel k non nul tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.



Remarque :
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont *colinéaires* si ils ont la même direction.

Remarque :
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont *colinéaires* si ils ont la même direction.

Exemple :
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives $(5; -3)$ et $(-15; 9)$ dans un repère.

Remarque :
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont *colinéaires* si ils ont la même direction.

Exemple :
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives $(5; -3)$ et $(-15; 9)$ dans un repère.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires car $\vec{v} = -3\vec{u}$ ou $\vec{u} = -\frac{1}{3}\vec{v}$.

Propriétés :

- Soient A, B et C trois points. A, B et C sont alignés et distincts si et seulement si il existe un nombre réel k non nul tel que $\vec{AB} = k\vec{AC}$;

Propriétés :

- Soient A, B et C trois points. A, B et C sont alignés et distincts si et seulement si il existe un nombre réel k non nul tel que $\vec{AB} = k\vec{AC}$;
- Soient A, B, C et D quatre points. Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont colinéaires.